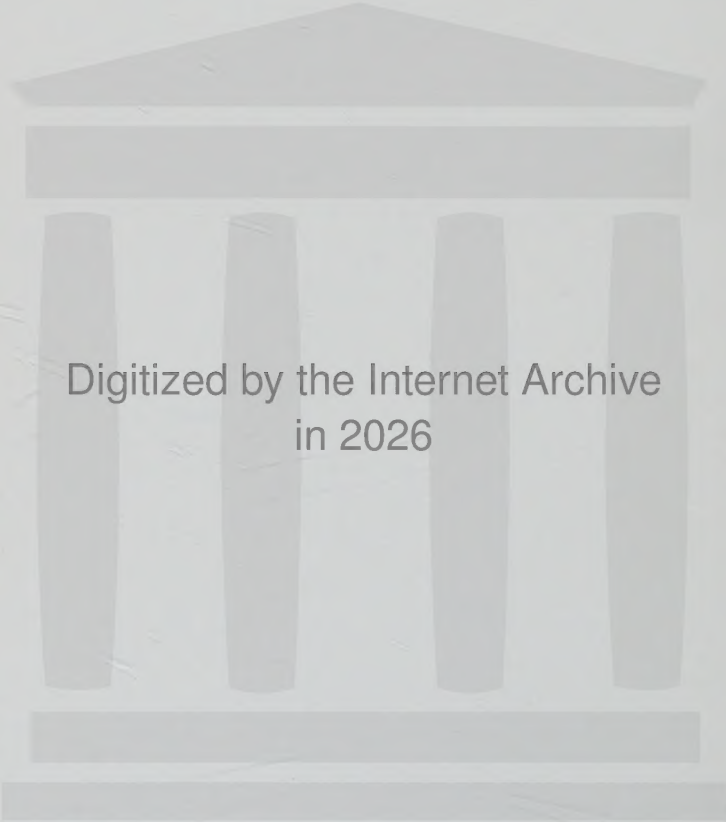


# ZUR GESTALT DER HIMMELSKÖRPER

Stationäre Rotationsbewegungen  
von Flüssigkeiten

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften  
der Justus Liebig-Universität Gießen  
(Fachbereich Mathematik)

vorgelegt von  
Helmut Kahleis  
aus Aussig  
Gießen 1972



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41545919\\_0032](https://archive.org/details/IA41545919_0032)





# ZUR GESTALT DER HIMMELSKÖRPER

Stationäre Rotationsbewegungen  
von Flüssigkeiten

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften  
der Justus Liebig - Universität Gießen  
(Fachbereich Mathematik)

vorgelegt von  
Helmut Kahleis  
aus Aussig  
Gießen 1972

D 26



Dekan: Professor Dr. Rudolf Borges

I. Berichterstatter: Professor Dr. Karl Maruhn

II. Berichterstatter: Professor Dr. Hermann Boerner

Tag der mündlichen Prüfung: 28.3.1972

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Einleitung .....                                                                                                        | 1  |
| §1. Ein Beweis der Existenz homogener zonaler Figuren in der<br>Nachbarschaft einer gegebenen homogenen zonalen Figur . | 5  |
| §2. Ein Beispiel einer homogenen zonalen Figur .....                                                                    | 20 |
| §3. Die Nachbarschaftsuntersuchung im Falle des Beispiels .                                                             | 25 |
| §4. Einige Hilfssätze .....                                                                                             | 32 |
| §5. Nichthomogene zonale Figuren in der Nachbarschaft<br>einer gegebenen nichthomogenen zonalen Figur .....             | 38 |
| Zusammenstellung benutzter Bezeichnungen .....                                                                          | 46 |
| Literaturverzeichnis .....                                                                                              | 47 |

## Einleitung

Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten ist Gegenstand einer langen Reihe von Untersuchungen. Sie hat ihren Ursprung in der Kosmogonie, und zwar in der Frage nach der möglichen Gestalt der Himmelskörper. Es wurde die Frage untersucht, ob eine homogene Flüssigkeit, wenn keine äußeren Kräfte vorliegen, wie ein starrer Körper rotieren kann und welche Gestalt ein solcher Flüssigkeitskörper dann annehmen kann. Als ein erstes Beispiel fand Maclaurin gewisse Rotationsellipsoide, die solche Gleichgewichtsfiguren sein können. Später zeigte Jacobi, daß auch dreiachsige Ellipsoide unter bestimmten Bedingungen für die Achsenverhältnisse als Gleichgewichtsfiguren möglich sind. Bei der Betrachtung der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit stellt sich heraus, daß unterhalb einer gewissen Schranke  $\omega_0$  für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu jedem Wert  $\omega$  mit  $\omega < \omega_0$  zwei Maclaurinsche Ellipsoide existieren können; nimmt  $\omega$  den Wert der Schranke an, so ist nur noch eine solche Figur möglich, während für größere Werte der Winkelgeschwindigkeit kein Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur möglich ist. Ähnlich verhält es sich für die Jacobischen Ellipsoide: unterhalb einer Schranke  $\omega_1 < \omega_0$  gibt es für jeden Wert  $\omega < \omega_1$  ein dreiachsiges Ellipsoid als Gleichgewichtsfigur, für den Grenzwert  $\omega_1$  geht dieses in ein Maclaurisches Ellipsoid über. Da die Achsenverhältnisse stetig von dem Wert der Winkelgeschwindigkeit abhängen, bietet sich eine Beschreibung der Gesamtheit dieser Gleichgewichtsfiguren durch den Begriff der linearen Reihe solcher Figuren an, die

sich in gewissen Punkten verzweigen oder schneiden können. Diese "Verzweigungspunkte" von linearen Reihen zogen das besondere Interesse auf sich. Liapounoff konnte zeigen, daß in der Umgebung des zu  $\omega = \omega_0$  gehörenden Maclaurinschen Ellipsoids keine weiteren Gleichgewichtsfiguren außer den Maclaurinschen Ellipsoiden existieren und daß es für eine abzählbare Menge von Werten der Winkelgeschwindigkeit neue Gleichgewichtsfiguren gibt, die sich nur wenig von den Maclaurinschen Ellipsoiden unterscheiden.

Schließlich konnte Lichtenstein eine gewisse Gesamtdarstellung des gesamten Problemkreises vorlegen, die die Nachbarschaftsfrage allgemein, d.h. nicht nur für Ellipsoide, auch für den Fall nichthomogener Flüssigkeiten und bei Vorliegen von äußeren Kräften umfaßt. Als wesentlich für die Verzweigung erweisen sich die sogenannten Verzweigungsgleichungen, deren Erfüllungbarkeit jeweils zu untersuchen ist.

In gewissem Sinne allgemeiner ist der Begriff der zonalen Figur. Hier rotiert die Flüssigkeit nicht wie ein starrer Körper, sondern es liegt eine stationäre Bewegung vor, bei der die Teilchen der Flüssigkeit Kreisbewegungen um dieselbe Achse ausführen, wobei die Winkelgeschwindigkeit eine Funktion des Abstandes von der Rotationsachse ist. Zonale Figuren müssen stets Rotationssymmetrie besitzen, falls die Winkelgeschwindigkeit nicht für alle Teilchen dieselbe ist. Damit eine stationäre Bewegung der geschilderten Art vorliegen kann, muß verlangt werden, daß die Flüssigkeit reibungsfrei ist. Mit solchen Figuren befaßten sich besonders Dive, Jardeitzky und Wavre. Die Bedeutung dieser Untersuchungen für die Astronomie

unterstreicht Struve in seinem Vorwort zu Jardetzky's Buch (Jardetzky [2]).

Die vorliegende Arbeit soll einige Beiträge zur Theorie der zonalen Figuren liefern. Zunächst wird ein Beweis für die Existenz homogener zonaler Figuren in der Nachbarschaft einer vorgegebenen homogenen zonalen Figur geführt, dessen Grundidee aus einer posthum veröffentlichten Arbeit Lichtensteins stammt. Dabei zeigt sich, daß im Falle der zonalen Figuren die Begriffe der linearen Reihe und des Verzweigungspunktes nicht mehr angemessen sind, da auch in den Fällen, in denen im Fall der Gleichgewichtsfiguren keine Verzweigung vorliegt (d.h. wenn die homogene Integralgleichung nur die "triviale" Lösung besitzt), die Änderung des Winkelgeschwindigkeitsgesetzes nicht notwendig durch nur einen einzigen Parameter beschreibbar sein muß, bezüglich dessen eine lineare Reihe vorläge. Als nichttriviales Beispiel einer zonalen Figur, d.h. einer solchen, die nicht schon eine Gleichgewichtsfigur darstellt, wird ein Kreisring mit elliptischem Meridianschnitt betrachtet und die zugehörige Winkelgeschwindigkeitsverteilung näherungsweise berechnet. Es zeigt sich, daß der Meridianschnitt in der Nähe des Kreises bleiben muß, wobei die große Achse sowohl senkrecht als auch parallel zur Rotationsachse der Figur verlaufen kann. Die möglichen Ringe kann man als einer linearen Reihe zugehörig betrachten und die Nachbarschaftsuntersuchung durchführen. Es zeigt sich hier am Beispiel, daß die Sonderrolle der Verzweigungspunkte nicht fortbesteht.

Ist die Flüssigkeit nicht mehr homogen, so werden die Verhältnisse komplizierter. Es können jedoch die Aussagen über die Ge-

stalt der Lösungen der homogenen Integralgleichung, die im Falle der rotationssymmetrischen homogenen Gleichgewichtsfiguren gelten, übertragen werden. Für die Verzweigungsgleichungen, deren Erfüllbarkeit auch weiterhin untersucht werden muß, bedeuten diese Aussagen in einem großen Teil der Fälle eine wesentliche Erleichterung. Auf Grund von Symmetriebetrachtungen können Aussagen über die Gestalt der Lösungen von inhomogenen Integralgleichungen gewonnen werden, womit dann der Lichtensteinsche Beweis für die Existenz von Nachbarschaftsfiguren im Falle nichthomogener Gleichgewichtsfiguren, der nur für den regulären Fall, d.h. für den Fall, daß die homogene Gleichung des Problems nur die "trivialen" Lösungen besitzt, geführt worden ist, auf den Fall der zonalen Figuren übertragen werden kann. Dabei zeigt sich dann, daß auch der Verzweigungsfall, sowohl für rotationssymmetrische Gleichgewichtsfiguren als auch für zonale Figuren im Falle nichthomogener Flüssigkeiten behandelt werden kann, wenn die homogene Gleichung des Problems nur Lösungen von bestimmtem Symmetrieverhalten besitzt und man sich auch im Falle der Gleichgewichtsfiguren auf die Bestimmung rotations-symmetrischer Nachbarschaftsfiguren beschränkt.

Besonderer Dank gilt meinem Lehrer Professor Dr. K. Maruhn, der diese Arbeit angeregt und unterstützt hat.

§1. Ein Beweis der Existenz homogener zonaler Figuren in der  
=====

Nachbarschaft einer gegebenen homogenen zonalen Figur  
=====

Unter einer zonalen Figur wollen wir einen Flüssigkeitskörper mit freier Oberfläche verstehen, auf den keine äußeren Kräfte wirken und dessen Teilchen stationäre Kreisbewegungen um eine gemeinsame Achse ausführen, wobei die Winkelgeschwindigkeit nur vom Abstand von dieser Achse abhängt. Diese Achse wählen wir als z-Achse eines cartesischen Koordinatensystems, als Ursprung wählen wir den Massenmittelpunkt des Körpers. Wir sprechen von einer homogenen zonalen Figur, falls die Dichte der als inkompressibel vorausgesetzten Flüssigkeit konstant ist, andernfalls von einer nichthomogenen zonalen Figur.

Gegeben sei eine zusammenhängende homogene zonale Figur  $T$  mit dem Rand  $S$ . Die Randfläche  $S$  soll eine stetige Außennormale  $\nu$  besitzen, deren Richtungscosinus  $a, b, c$  einer Hölderbedingung genügen. Die Winkelgeschwindigkeitsverteilung sei durch die Funktion  $\omega(R)$  gegeben;  $R$  bezeichne den Abstand von der Rotationsachse.

Die Frage, die hier untersucht werden soll, lautet: Gibt es in der Nachbarschaft von  $T+S$  eine homogene zonale Figur  $T_1$  mit dem Rand  $S_1$ , die dieselbe Rotationsachse und denselben Schwerpunkt wie  $T+S$  besitzt und zu der eine Winkelgeschwindigkeitsverteilung  $\omega_1(R)$  gehört, die sich nur wenig von  $\omega(R)$  unterscheidet? Diese Nachbarschaftsfigur wird dann auch zusammenhängend sein.

Bei der Untersuchung dieser Frage stellt man sich vor, daß die

Figur  $T_1+S_1$  dadurch aus  $T+S$  hervorgeht, daß man in den Punkten  $s$  der Oberfläche  $S$  von  $T$  den Wert einer auf  $S$  erklärten, stetigen Ortsfunktion  $\zeta(s)$  in Richtung der Normalen in diesem Punkt, die mit  $v_s$  bezeichnet werden soll, abträgt und so einen Punkt  $s_1$  der Fläche  $S_1$  erhält.

Damit  $T_1+S_1$  in der Nachbarschaft von  $T+S$  gelegen ist, braucht man nur zu verlangen, daß

$$(1) |\zeta(s)| \leq \Omega$$

für alle Punkte  $s \in S$  erfüllt ist. Die kleine positive Größe  $\Omega$  soll insbesondere so klein gewählt werden, daß die Zuordnung der Punkte  $s$  und  $s_1$  umkehrbar eindeutig ist.

Bezeichnet man das Newtonsche Potential von  $T$  im Punkte  $t$  mit  $V(t)$  und das Potential der Zentrifugalkraft mit  $\Phi(t)$ , so muß für alle Punkte  $s \in S$  gelten

$$(2) \kappa V(s) + \Phi(s) = c_0.$$

Dabei ist  $c_0$  eine Konstante und  $\kappa$  die Gravitationskonstante. Die Gleichung (2) drückt aus, daß  $S$  eine Äquipotentialfläche der Gesamtkraft ist. Dies ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer homogenen zonalen Figur. Da  $T_1+S_1$  ebenfalls eine homogene zonale Figur sein soll, muß entsprechend für alle Punkte  $s_1 \in S_1$  gelten

$$(3) \kappa V_1(s_1) + \Phi_1(s_1) = c_1,$$

wenn  $V_1$  und  $\Phi_1$  die entsprechenden Potentiale von  $T_1+S_1$  bezeichnen.

Aus (2) und (3) erhält man sofort

$$(4) \kappa [V_1(s_1) - V(s)] + \Phi_1(s_1) - \Phi(s) = \kappa C.$$

Hier soll  $C$  als eine dem Betrage nach kleine Konstante aufgefaßt werden

$$(5) \quad |\zeta| < \Omega_1$$

und  $s_1$  als das Bild von  $s$  unter der durch  $\zeta$  vermittelten Abbildung. Mit  $R_i$  sei der Abstand der Figur von der Rotationsachse bezeichnet,  $R_m$  stehe für

$$R_m = \begin{cases} 0 & R_i = 0 \\ R_i - \Omega & R_i > 0 \end{cases}$$

Mit  $R_A$  sei der maximale Abstand von Punkten  $s \in S$  von der Rotationsachse bezeichnet und es sei  $R_M = R_A + \Omega$ . Die Funktion  $w$  soll in  $[R_m, R_M]$  stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzen. Die Funktion  $w_1$  soll mit  $w$  durch die Gleichung

$$(6) \quad w_1^2(R) - w^2(R) = \lambda(R)$$

verbunden sein, wobei  $\lambda$  eine in  $[R_m, R_M]$  stetige Funktion sein soll, die stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzt. Damit besitzt  $w_1^2$  dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie  $w^2$ . Die Funktion  $\lambda$  soll in  $[R_m, R_M]$  der Abschätzung

$$(7) \quad |\lambda(R)| < \lambda_0$$

mit einer positiven Konstanten  $\lambda_0$  genügen.

Wie Lichtenstein (L. [1], S. 643) gezeigt hat, gilt

$$(8) \quad V_1(s_1) - V(s) = \zeta(s) \frac{\partial}{\partial \nu_s} V(s) + \int_S \frac{f \zeta(s')}{D(s, s')} ds' + \theta\{\zeta\},$$

wobei wegen (1) die Abschätzung

$$(9) \quad |\theta\{\zeta\}| \leq a_0 \Omega^2 |\log \Omega|$$

mit einer Konstanten  $a_0$  gilt;  $f$  bezeichnet die Dichte und  $D(s, s')$  den Abstand der Punkte  $s$  und  $s'$ .

Bezeichnet man den Cosinus des Winkels zwischen der Normalen  $\nu_s$  und dem Lot des Punktes  $s$  auf die Rotationsachse, von jener nach  $s$  gerichtet, mit  $\tau_s$ , so kann man für die Differenz der Zentrifugalpotentiale schreiben

$$\begin{aligned}
 \phi_1(s_1) - \phi(s) &= \int_W [\omega_1^2(R') - \omega^2(R)] R' dR' + \omega^2(R[s]) R(s) \zeta(s) \tau_s \\
 (10) \quad &+ \frac{1}{2} \omega^2(R[s]) (a^2 + b^2)_s \zeta^2(s) + \int_{R(s)}^{R(s_1)} [\omega_1^2(R') - \omega^2(R[s])] R' dR' \\
 &\quad (W = \text{const.})
 \end{aligned}$$

Der Wert der Schwerkraft im Punkte  $s$  der Oberfläche  $S$  soll mit  $\kappa\psi(s)$  bezeichnet werden. Für ihn gilt

$$\kappa\psi(s) = \kappa \frac{\partial}{\partial \nu_S} V(s) + \omega^2(R[s]) R(s) \tau_s.$$

Damit erhält man aus (4)

$$\begin{aligned}
 \psi(s) \zeta(s) + \int_S \frac{f \zeta(s')}{D(s, s')} ds' &= C - \frac{1}{2\kappa} \omega^2(R[s]) (a^2 + b^2)_s \zeta^2(s) - \\
 (11) \quad &- \frac{1}{\kappa} \int_W [\omega_1^2(R') - \omega^2(R)] R' dR' - \frac{1}{\kappa} \int_{R(s)}^{R(s_1)} [\omega_1^2(R') - \omega^2(R[s])] R' dR' - A\{\zeta\}
 \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}
 -\kappa\Pi\{\lambda, \zeta\} &= \frac{1}{\kappa} \omega^2(R[s]) (a^2 + b^2)_s \zeta^2(s) + \int_{R(s)}^{R(s_1)} [\omega_1^2(R') - \omega^2(R)] R' dR' + \\
 (12) \quad &+ \int_{R(s)}^{R(s_1)} [\omega^2(R') - \omega^2(R[s])] R' dR' + \kappa\theta\{\zeta\}
 \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich die Gleichung

$$(13) \quad \psi(s) \zeta(s) + \int_S \frac{f \zeta(s')}{D(s, s')} ds' = C - \frac{1}{\kappa} \int_W [\omega_1^2(R') - \omega^2(R)] R' dR' + \Pi\{\lambda, \zeta\}$$

Für die positive Zahl  $\lambda_0$  aus (7) gelte

$$(14) \quad \lambda_0 < \Omega_1.$$

Damit kann man den Betrag von  $\Pi\{\lambda, \zeta\}$  mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung unter Berücksichtigung von (1) und (14) wie folgt abschätzen

$$|\Pi\{\lambda, \zeta\}| \leq a_0 \Omega^2 |\log \Omega| + a_1 \Omega^2 + a_2 \Omega_1 \Omega$$

mit positiven Konstanten  $a_0, a_1, a_2$ . Es gilt also

$$(15) \quad \Pi\{\lambda, \zeta\} = A(\Omega_1, \Omega)(\Omega_1 + \Omega),$$

wobei  $A(\Omega_1, \Omega)$  eine für hinreichend kleine Werte von  $\Omega_1$  und  $\Omega$  erklärte und stetige Funktion ist, die für  $\Omega_1^2 + \Omega^2 \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert und bei festgehaltenem  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\Omega_1$  sowie bei festgehaltenem  $\Omega_1$  in Abhängigkeit von  $\Omega$  nicht abnimmt.

Es sei nun  $\zeta$  ebenfalls eine auf  $S$  erklärte stetige Ortsfunktion, die der Ungleichung (1) genügt und die auf die gleiche Weise wie  $\zeta$  jedem Punkt  $s \in S$  einen Punkt  $\dot{s}_1$  zuordnet. Die Gesamtheit der Punkte  $\dot{s}_1$  bildet eine Fläche  $\dot{S}_1$ . Weiter soll für alle  $s \in S$  die Ungleichung

$$(16) \quad |\zeta(s) - \dot{\zeta}(s)| \leq \Lambda \leq 2\Omega$$

erfüllt sein. Die Differenz  $\theta\{\zeta(s)\} - \theta\{\dot{\zeta}(s)\}$  läßt sich dann durch

$$(17) \quad |\theta\{\zeta(s)\} - \theta\{\dot{\zeta}(s)\}| \leq b_0 \Omega |\log \Omega| \Lambda$$

abschätzen (Lichtenstein [1], S. 647).

Für die Differenz  $\Pi\{\lambda, \zeta\} - \Pi\{\lambda, \dot{\zeta}\}$  erhält man die Abschätzung

$$|\Pi\{\lambda, \zeta\} - \Pi\{\lambda, \dot{\zeta}\}| \leq b_0 \Omega |\log \Omega| \Lambda + b_1 \Omega \Lambda + b_2 \Omega_1 \Lambda$$

mit positiven Konstanten  $b_0, b_1, b_2$ .

Insgesamt gilt also

$$(18) \quad |\Pi\{\lambda, \zeta\} - \Pi\{\lambda, \dot{\zeta}\}| \leq B(\Omega_1, \Omega) \Lambda,$$

wobei  $B(\Omega_1, \Omega)$  eine wie  $A(\Omega_1, \Omega)$  beschaffene Funktion ist.

Die Frage nach der Existenz einer zonalen Figur  $T_1 + S_1$  in der Nachbarschaft der gegebenen zonalen Figur  $T + S$  ist äquivalent zu der Frage nach der Existenz von Lösungen der Integralgleichung (13) für hinreichend kleine Werte von  $\Omega_1$  und  $\Omega$ .

Zur Untersuchung von (13) betrachtet man zunächst die homogene Gleichung

$$(19) \quad \psi(s)\zeta(s) + \int_S \frac{f \zeta(s')}{D(s, s')} ds' = 0$$

Da zonale Figuren Rotationsfiguren sind, haben die Lösungen der Gleichung (19) die Gestalt

$$(20) \quad \zeta(s) = F(R[s], z)$$

oder sie treten paarweise auf und sind dann von der Form

$$(21) \quad F_1(R, z) \cos k\varphi, \quad F_1(R, z) \sin k\varphi.$$

Dabei bezeichnet  $\varphi$  den Azimutwinkel und  $k$  ist eine natürliche Zahl (Lichtenstein [2], S. 52).

Die Lösungen der Gleichung (19) können so gewählt werden, daß

$$\zeta(R, z, \varphi) = \zeta(R, -z, \varphi) \quad \text{oder} \quad \zeta(R, z, \varphi) = -\zeta(R, -z, \varphi) \quad \text{gilt.}$$

Die Gleichung (19) besitzt stets eine Lösung der Form (20), die meist als "triviale" Lösung bezeichnet wird, nämlich

$$(22) \quad v_1(R[s], z) = K c(s)$$

mit einer beliebigen Konstanten  $K$  und der  $z$ -Komponente  $c$  der Normalen  $\vec{v} = (a, b, c)$  (Hölder [1], S. 57). Da eine Rotationsfigur vorliegt, ist  $v_1$  die einzige "triviale" Lösung.

Insgesamt besitze die Integralgleichung (19)  $m$  ( $\geq 1$ ) linear unabhängige Lösungen. Mit  $u_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) seien die gemäß

$$(23) \quad \int_S f \psi(s') u_1(s') u_k(s') ds' = -\delta_{ik}$$

mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{ik}$  normierten Lösungen von (19) bezeichnet. Führt man nun die Kernzerspaltung

$$(24) \quad \frac{1}{D(s, s')} = N(s, s') + \sum_1^m \psi(s) \psi(s') u_j(s) u_j(s')$$

durch, so weiß man, daß dann die homogene Gleichung

$$(25) \quad \psi(s) \zeta(s) + \int_S f N(s, s') \zeta(s') ds' = 0$$

keine Lösung  $\zeta \neq 0$  besitzt (Schmidt [1], S. 387). Daher kann die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(26) \quad \zeta(s) + \int_S \frac{f N(s, s')}{\psi(s)} \zeta(s') ds' = g(s)$$

mit Hilfe der Resolvente  $H(s, s')$  zum Kern  $\frac{fN(s, s')}{\psi(s)}$  dargestellt werden:

$$(27) \quad \zeta(s) = g(s) - \int_S H(s, s') g(s') ds'$$

Ähnlich wie bei Lichtenstein (L. [2], S. 69-70) wollen wir zunächst die Gleichung

$$(28) \quad \begin{aligned} \psi(s) \zeta(s) + \int_S fN(s, s') \zeta(s') ds' &= -\frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' + C + \Pi\{\lambda, \zeta\} - \\ &- \int_S \left\{ f \zeta(s') \sum_1^{m^*} \{ \psi(s) \psi(s') u_1^*(s) u_1^*(s') \} \right\} ds' \end{aligned}$$

betrachten, wobei mit  $u_1^*$  die gemäß (23) normierten Lösungen von (19) bezeichnet sind, die die Gestalt (20) haben und für die  $u_1^*(R[s], z) = u_1^*(R[s], -z)$  gilt;  $m^*$  sei die Anzahl dieser Lösungen.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, gemäß

$$(29) \quad r_1 = \int_S f \psi(s') \zeta(s') u_1^*(s') ds' \quad (1 = 1, \dots, m^*)$$

unbestimmte Parameter  $r_1$  einzuführen. Hiermit erhält (28) die Form

$$(30) \quad \begin{aligned} \psi(s) \zeta(s) + \int_S fN(s, s') \zeta(s') ds' &= C + \Pi\{\lambda, \zeta\} - \\ &- \frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' + \sum_1^{m^*} r_1 \psi(s) u_1^*(s) \end{aligned}$$

Nach (27) gilt nun für die Lösung von (30) die Gleichung

$$(31) \quad \begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\psi(s)} \left[ C - \frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' + \Pi\{\lambda, \zeta(s)\} \right] + \sum_1^{m^*} r_1 u_1^*(s) \\ &- \int_S H(s, s') \frac{1}{\psi(s')} \left[ C - \frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' + \Pi\{\lambda, \zeta(s')\} + \sum_1^{m^*} r_1 \psi(s') u_1^*(s') \right] ds' \end{aligned}$$

Dabei liefert der letzte Summand des Integrals keinen Beitrag (Lichtenstein [2], S. 56). Faßt man nun durch

$$(32) \quad P(C, r_1, \dots, r_{m*}, \lambda, s) = \frac{1}{\psi(s)} \left[ C - \frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' \right] + \sum_1^{m*} r_1 u_1^*(s) - \int_S \frac{H(s, s')}{\psi(s')} \left[ C - \frac{1}{\kappa} \int_W \lambda(R') R' dR' \right] ds'$$

die Glieder zusammen, in denen  $\zeta(s)$  nicht explizit enthalten ist und schreibt abkürzend

$$(33) \quad U\{\lambda, \zeta(s)\} = \frac{1}{\psi(s)} \Pi\{\lambda, \zeta(s)\} - \int_S \frac{H(s, s')}{\psi(s')} \Pi\{\lambda, \zeta(s')\} ds',$$

so erhält man die Beziehung

$$(34) \quad \zeta(s) = P(C, r_1, \dots, r_{m*}, \lambda, s) + U\{\lambda, \zeta(s)\},$$

der  $\zeta(s)$  genügt. Es gelte nun

$$(35) \quad |C|, |\lambda_0|, |r_1|, \dots, |r_{m*}| \leq \Omega_1.$$

Da die Schwerkraft auf  $S$  nirgends verschwinden soll, folgt mit

(15) die Abschätzung

$$(36) \quad |U\{\lambda, \zeta(s)\}| \leq A_1(\Omega_1, \Omega)(\Omega_1 + \Omega)$$

mit einer Funktion  $A_1(\Omega_1, \Omega)$ , die dieselben Eigenschaften besitzt, die oben für  $A(\Omega_1, \Omega)$  aufgeführt worden sind. Weiter gilt wegen (18) für Funktionen  $\zeta$  und  $\dot{\zeta}$ , die der Bedingung (16) genügen,

$$(37) \quad |U\{\lambda, \zeta(s)\} - U\{\lambda, \dot{\zeta}(s)\}| \leq \Lambda B_1(\Omega_1, \Omega),$$

wobei  $B_1(\Omega_1, \Omega)$  eine wie  $A(\Omega_1, \Omega)$  beschaffene Funktion ist. Aus (32) und (35) folgt, daß

$$(38) \quad P(C, r_1, \dots, r_{m*}, \lambda, s) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \Omega_1 \rightarrow 0$$

gilt. Damit hat die Beziehung (34) (und somit auch (30) bei vorgegebenen  $C, r_1, \dots, r_{m*}$  und  $\lambda$  unter Berücksichtigung von (35) genau eine stetige Lösung  $\zeta$ , falls  $\Omega_1$  hinreichend klein ist. Mit  $\Omega_1 \rightarrow 0$  strebt dabei auch  $\zeta$  gegen Null (Lichtenstein [3], S. 14). Da T+S symmetrisch zur Ebene  $z=0$  ist (Wavre [1], S. 35-39), ist

die rechte Seite der Gleichung (13) für jede zur z-Achse rotationssymmetrische und zur Ebene  $z=0$  symmetrische Funktion  $\zeta$  zur z-Achse rotationssymmetrisch und zur Ebene  $z=0$  symmetrisch. Da auch die Funktionen  $u_1^*$  diese Symmetrieeigenschaften haben, gilt diese Aussage auch für die rechte Seite der Gleichung (30). Es soll nun gezeigt werden, daß auch die Lösung  $\zeta$  von (34) diese Symmetrieeigenschaften besitzt. Da die Funktion  $\zeta$  eindeutig bestimmt ist, kann man sie mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation bestimmen. Es genügt zu zeigen, daß die genannten Symmetrieeigenschaften bei der Bildung der Näherungen erhalten bleiben. Wenn man dann die Näherungen mit einer Funktion beginnt, die diese Symmetrieeigenschaften besitzt, so weiß man, daß alle sich daraus ergebenden weiteren Näherungen diese Symmetrieeigenschaften besitzen und damit auch die Grenzfunktion  $\zeta$ .

Die Funktion  $g(s)$  in der Gleichung (26) besitze die genannten Symmetrieeigenschaften. Die Lösung der Gleichung (26) kann in  $\zeta = \zeta^+ + \zeta^-$

zerlegt werden, wobei  $\zeta^+$  in Punkten  $s$  und  $s^-$ , die symmetrisch zu der Ebene  $z=0$  gelegen sind, denselben Wert annimmt, während  $\zeta^-(s) = -\zeta^-(s^-)$  ist.

Die Gesamtheit der Lösungen von (19) zerfällt in zwei Klassen, je nach ihrem Symmetrieverhalten. Die eine Klasse besteht aus den symmetrischen Lösungen  $u_j^+$ , die andere aus den antisymmetrischen Lösungen  $u_1^-$ .

Nun ist

$$I_1(s) = \int_S \frac{f \zeta^+(s')}{\psi(s) D(s, s')} ds' = \int_S \frac{f \zeta^+(s'^-)}{\psi(s^-) D(s^-, s'^-)} ds'^- = I_1(s^-)$$

symmetrisch zur Ebene  $z=0$ , während

$$I_2(s) = \int_S \frac{f \zeta^-(s')}{\psi(s) D(s, s')} ds' = \int_S \frac{f [-\zeta^-(s'^-)]}{\psi(s^-) D(s^-, s'^-)} ds'^- = -I_2(s^-)$$

antisymmetrisch ist. Die Gleichung (26) läßt sich nun wegen (24) mit den eben eingeführten Abkürzungen in der Form

$$\begin{aligned} & \zeta^+(s) + \zeta^-(s) + I_1(s) + I_2(s) - \\ & - \sum_j u_j^+(s) \int_S f \psi(s') u_j^+(s') \zeta^+(s') ds' - \\ (39) & - \sum_j u_j^+(s) \int_S f \psi(s') u_j^+(s') \zeta^-(s') ds' - \\ & - \sum_i u_i^-(s) \int_S f \psi(s') u_i^-(s') \zeta^+(s') ds' - \\ & - \sum_i u_i^-(s) \int_S f \psi(s') u_i^-(s') \zeta^-(s') ds' = g(s) \end{aligned}$$

schreiben. Berücksichtigt man nun, daß zwei der Summen verschwinden und faßt die Glieder nach ihrem Symmetrieverhalten zusammen, so erhält man schließlich die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \zeta^+(s) + \int_S \frac{f N(s, s')}{\psi(s)} \zeta^+(s') ds' &= g(s) \\ \zeta^-(s) + \int_S \frac{f N(s, s')}{\psi(s)} \zeta^-(s') ds' &= 0 \end{aligned}$$

Da die zweite Gleichung nur die Lösung  $\zeta=0$  besitzt, gilt  $\zeta=\zeta^+$ . Eine analoge Überlegung zeigt nun, daß auch jede Ebene  $y=ax$  eine Symmetrieebene der Lösung  $\zeta$  von (26) ist,  $\zeta$  muß also zur  $z$ -Achse rotationssymmetrisch sein.

Mit den obigen Überlegungen ist somit sichergestellt, daß auch die eindeutig bestimmte Lösung  $\zeta$  von (30) zur  $z$ -Achse rotationssymmetrisch und zur Ebene  $z=0$  symmetrisch ist. Ob  $\zeta$  auch eine Lösung der Gleichung (28) ist, kann erst die Diskussion der Verzweigungsgleichungen (29) zeigen. Lassen sich die Verzweigungsgleichungen erfüllen oder besitzt die Gleichung (19) keine Lösungen  $u_i^*$  der Gestalt (20) mit der Eigenschaft

$u_1^*(R[s], z) = u_1^*(R[s], -z)$ , so ist  $\zeta$  auch eine Lösung der Gleichung (13), denn es gilt

$$\psi(s)\zeta(s) + \int_S fN(s, s')\zeta(s')ds' = C - \frac{1}{\pi} \int_W^R \lambda(R')R'dR' + U[\lambda, \zeta] - \sum_1^m \psi(s)u_1(s) \int_S f\psi(s')u_1(s')\zeta(s')ds',$$

da wegen der Symmetrieeigenschaften von  $\zeta$  nur die Integrale einen Beitrag zur Summe auf der rechten Seite liefern, in denen die  $u_1^*$  auftreten. Umgekehrt ist jede Lösung  $\tilde{\zeta}$  von (13), die rotationssymmetrisch zur z-Achse und symmetrisch zur Ebene  $z=0$  ist, eine Lösung von (28). Besitzt (19) keine Lösungen  $u_1^*$  mit den angegebenen Symmetrieeigenschaften, so muß  $\tilde{\zeta}=\zeta$  sein, da dann die Gleichung (28) genau eine Lösung besitzt. Diese Funktion  $\zeta$  bestimmt dann die Nachbarschaftsfigur  $T_1+S_1$ . Besitzt (19) dagegen Lösungen  $u_1^*$  mit den angeführten Symmetrieeigenschaften, so ist wie im Fall der Gleichgewichtsfiguren nun das System (29) der Verzweigungsgleichungen zu diskutieren. Erst wenn feststeht, daß die Parameter  $r_1, \dots, r_{m*}$  so bestimmt werden können, daß die Gleichungen (29) erfüllt sind, weiß man, daß  $\zeta$  eine Lösung von (11) ist und die durch  $\zeta$  festgelegte Figur  $T_1+S_1$  eine homogene zonale Figur in der Nachbarschaft der gegebenen.

Bei zusammenhängenden homogenen Gleichgewichtsfiguren liegt in dem Fall, daß die homogene Gleichung nur die triviale Lösung  $u_1$  besitzt ( $m=1$ ), nur ein Parameter, nämlich  $\lambda$ , vor, da  $C=0$  gesetzt werden kann. Dies führt zu linearen Reihen von Gleichgewichtsfiguren. Im Falle  $m>1$  können sich etwa lineare Reihen schneiden oder es können von einer linearen Reihe "Arme" von Figuren abzweigen.

Diese Beschreibung durch lineare Reihen erscheint im Falle zonalen Figuren nicht angemessen, weil bei der Beschreibung der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten statt des Parameters  $\lambda$  eine Funktion  $\lambda(R)$  auftritt. Man weiß, daß das System  $\{u_n\}$  der Eigenfunktionen der homogenen Integralgleichung

$$\psi(s)\zeta(s) + \mu \int_S \frac{\zeta(s')}{D(s, s')} ds' = 0$$

abgeschlossen ist (Lichtenstein [5], S. 151).

Gibt man sich nun die Differenz der Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten speziell so vor, daß

$$\frac{1}{\kappa \psi(s)} \int_W \lambda(R') R' dR' = F_0(R[s]) + \sum_1^N \beta_i u_i(R[s])$$

gilt, so erkennt man, daß man selbst im Falle  $m=1$  über  $N$  Parameter  $\beta_i$  verfügen kann, eine lineare Abhängigkeit von nur einem Parameter also nicht mehr erwartet werden darf.

Bei zusammenhängenden homogenen zonalen Figuren spielen die nach (29) zu den  $u_i^*$  gehörenden Parameter  $r_i$  insofern nicht mehr dieselbe Sonderrolle wie im Falle der Gleichgewichtsfiguren, als über die entsprechenden  $\beta_i$  im Rahmen von (7) und (14) frei verfügt werden kann. Die Erfüllbarkeit der Verzweigungsgleichungen muß jedoch auch hier noch untersucht werden.

Aus (36), (37) und (38) folgte, daß die Beziehung (34) für hinreichend kleine Werte von  $\Omega_1$  genau eine stetige Lösung  $\zeta$  besitzt, die dann (falls die evtl. vorliegenden Verzweigungsgleichungen erfüllt werden können) die Nachbarschaftsfigur  $T_1 + S_1$  bestimmt. Deren Oberfläche  $S_1$  ist nun aber in (3) als Äquipotentialfläche vorausgesetzt worden, da ja  $T_1 + S_1$  wieder eine zonale Figur sein soll. Das Newtonsche Potential  $V_1$  der

Nachbarschaftsfigur besitzt als ein Potential einer stetigen Dichtebelegung überall stetige Ableitungen erster Ordnung, die einer Hölderbedingung genügen. Das Zentrifugalpotential

$$\Phi_1(R) = \int_W^R \omega_1^2(R') R' dR'$$

besitzt nach den Voraussetzungen über  $\omega$  und  $\lambda$  sogar stetige Ableitungen jeder Ordnung. Hieraus folgt, daß das Gesamtpotential  $U_1 = \kappa V_1 + \Phi_1$  überall stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt, die einer Hölderbedingung genügen.

In allen Punkten von  $S_1$ , die nicht in der Symmetrieebene  $z=0$  liegen, ist, wie man auf Grund der Symmetrieeigenschaft leicht nachweist, die partielle Ableitung  $\frac{\partial U_1}{\partial z} \neq 0$ . Wir können nachweisen, daß in den Punkten, die  $S_1$  mit der Symmetrieebene gemeinsam hat,  $\frac{\partial U_1}{\partial R}$  sicher dann von Null verschieden ist, wenn  $\Omega_1$  und  $\Omega$  hinreichend klein gewählt werden.

Es sei  $s_0$  ein Punkt von  $S$ , der in der Ebene  $z=0$  gelegen ist, sein Abstand von der  $z$ -Achse sei  $R_0$ . Wegen der Voraussetzung, daß  $S$  eine hölderstetige Normale besitzt, können wir

$$\kappa \psi(s_0) = \kappa \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{s_0} + \omega^2(R_0) R_0 < 0$$

annehmen. In dem entsprechenden Punkt  $s_1$  der Nachbarschaftsfigur, dessen Abstand von der  $z$ -Achse mit  $R_1$  bezeichnet werden soll, gilt damit

$$\begin{aligned} (40) \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|_{s_1} &= \kappa \left. \frac{\partial V_1}{\partial R} \right|_{s_1} + \omega_1^2(R_1) R_1 \\ &= \kappa \left. \frac{\partial V_1}{\partial R} \right|_{s_1} - \kappa \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{s_0} + \omega_1^2(R_1) R_1 - \omega^2(R_0) R_0 + \kappa \psi(s_0) \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überlegt, gilt

$$(41) \quad \left| \omega_1^2(R_1) R_1 - \omega^2(R_0) R_0 \right| \leq R_0 \Omega_1 + \Omega \max_{[R_m, R_M]} \omega_1^2 + R_0 \Omega \max_{[R_m, R_M]} \left| \frac{d\omega_1^2}{dR} \right|$$

Weiter gilt

$$(42) \quad \left. \frac{\partial V_1}{\partial R} \right|_{S_1} - \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_0} = \left\{ \left. \frac{\partial V_1}{\partial R} \right|_{S_1} - \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_1} \right\} + \left\{ \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_1} - \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_0} \right\}$$

Der Betrag des ersten Summanden der rechten Seite läßt sich durch den Betrag der Ableitung des von  $S$  und  $S_1$  begrenzten Schalenkörpers  $\mathcal{L}$  abschätzen

$$(43) \quad \left| \left. \frac{\partial}{\partial R} (V_1 - V) \right|_{S_1} \right| = \int_{\mathcal{L}} \frac{f \, dt'}{D^2(s_1, t')} \leq A_1 \Omega |\log \Omega|$$

(Lichtenstein [1], S. 642), für den zweiten Summanden gilt

$$(44) \quad \left| \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_1} - \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{S_0} \right| = \Omega [A_2 |\log \Omega| + A_3]$$

(Lichtenstein [2], S. 2);  $A_1, A_2, A_3$  sind positive Konstanten.

Aus (40) - (44) folgt, daß

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial R} \right|_{S_1} < 0$$

gilt, falls nur  $\Omega_1$  und  $\Omega$  hinreichend klein sind.

Da  $U_1$  überall stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, die einer Hölderbedingung genügen und da auf  $S_1$  stets eine partielle Ableitung von  $U_1$  von Null verschieden ist, besitzt  $S_1$  eine stetige Normale, deren Richtungs cosinus einer Hölderbedingung genügen.

Zusammenfassend können wir folgenden Satz aussprechen

Satz: In der Nachbarschaft einer beschränkten, zusammenhängenden homogenen zonalen Figur mit hölderstetiger Normale, deren Winkelgeschwindigkeitsverteilung durch eine Funktion  $\omega(R)$  gegeben ist, die in  $[R_m, R_M]$  stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzt, gibt es zu jeder Funktion  $\omega_1(R)$ , die der Gleichung (6) mit einer Funktion  $\lambda(R)$  genügt, die in  $[R_m, R_M]$  stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzt und die Bedingung (7) erfüllt und zu jeder Kon-

stanten  $C$  genau eine Nachbarschaftsfigur mit hölderstetiger Normale, falls die Ungleichung

$$|C|, \lambda_0 < \Omega_1$$

mit hinreichend kleinem  $\Omega_1$  erfüllt ist und die Gleichung (19) nur die "triviale" Lösung oder nur Lösungen der Form (20), die antisymmetrisch zur Ebene  $z=0$  sind, sowie der Gestalt (21) besitzt. Falls die Gleichung (19) Lösungen der Gestalt (20) besitzt, die symmetrisch zur Ebene  $z=0$  sind, liefert erst die Diskussion der Verzweigungsgleichungen (29) eine Aussage über die Existenz von Nachbarschaftsfiguren.

## §2. Ein Beispiel einer homogenen zonalen Figur

Wir wollen in diesem Paragraphen ein Beispiel einer zusammenhängenden homogenen zonalen Figur angeben. Die benutzte Methode, die Winkelgeschwindigkeitsfunktion  $\omega$  zu einem gegebenen Körper zu bestimmen, läßt sich auch bei anderen Beispielen anwenden. Sie beruht auf der Tatsache, daß die Oberfläche  $S$  einer zonalen Figur eine Äquipotentialfläche ist:

$$\kappa V(s) + \int_W \omega^2(R') R' dR' = \text{const.}$$

Zunächst bestimmen wir uns die Werte des Newtonschen Potentials  $V$  von  $T$  auf dem Rand  $S$  der betrachteten Figur, die zur  $z$ -Achse rotationssymmetrisch und zur Ebene  $z=0$  symmetrisch ist (diese Symmetrieeigenschaften sind notwendig für das Vorliegen einer homogenen zonalen Figur, falls  $\omega \neq \text{const}$  ist). In einem Meridianschnitt erhalten wir die Werte von  $V$  auf  $S$  als  $V(R, z)$ . Auf  $S$  läßt sich  $z$  als  $z(R)$  ausdrücken (aus Symmetriegründen können wir uns auf den Teil von  $S$  beschränken, für den  $z \geq 0$  gilt), daher können wir  $V$  auf  $S$  als Funktion von  $R$  allein ausdrücken  $V(R, z) = W(R)$ .

Damit ergibt sich aus der auf  $S$  zu erfüllenden Gleichung für  $\omega^2$  die Beziehung

$$\omega^2 = - \frac{\kappa}{R} \frac{dW}{dR},$$

die nur dann zu einer physikalisch sinnvollen Funktion  $\omega$  führen kann, wenn auf  $S$  stets  $\frac{dW}{dR} \leq 0$  gilt. Da  $W(R)$  eindeutig bestimmt ist, ist auch  $\omega(R)$  eindeutig festgelegt. Man darf daher nicht erwarten, daß sich z.B. für ein Maclaurinsches Ellipsoid eine Funktion  $\omega \neq \text{const}$  finden läßt, so daß eine homo-

gene zonale Figur vorliegt. Auch kann kein Rotationsellipsoid, das nicht Maclaurinsches Ellipsoid ist (also kein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse die größere Achse ist), eine homogene zonale Figur sein:

Das Newtonsche Potential eines mit konstanter Dichte belegten Rotationsellipsoids hat bekanntlich die Form

$$V(R,z) = D - AR^2 - Cz^2$$

mit positiven Konstanten A, C, D. Da auf der Oberfläche

$$z^2 = K_1 - K_2 R^2$$

mit positiven Konstanten  $K_1, K_2$  gilt, müßte die gesuchte Funktion  $w$  konstant sein. Falls  $\frac{dw}{dR}$  nicht überhaupt positiv wäre, müßte ein Maclaurinsches Ellipsoid vorliegen.

Als Beispiel einer homogenen zonalen Figur, die nicht schon eine Gleichgewichtsfigur ist, soll ein Kreisring mit ellipsenförmigem Meridianschnitt betrachtet werden. Eine Achse der Ellipse soll parallel zur Rotationsachse verlaufen und diese soll die Ellipse nicht schneiden oder berühren. Der Wert der Dichte sei  $\rho = \rho_0$ .

Es ist zweckmäßig, zur Beschreibung folgende Koordinatensysteme einzuführen:

1.) ein dreidimensionales kartesisches System  $X, Y, Z$ , dessen Ursprung im Schnittpunkt der Rotationsachse mit der Symmetrieebene der Figur liegt und bei dem die  $Z$ -Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt. Der betrachtete Meridianschnitt des Ringes soll in der Ebene  $Y = 0$  dieses Systems liegen. Der Mittelpunkt der Ellipse liege auf der  $X$ -Achse, sein Abstand vom Ursprung sei  $L$ . Die Symmetrieebene der Figur, die senkrecht auf der Rotationsachse steht, ist die Ebene  $Z = 0$  des

betrachteten Systems;

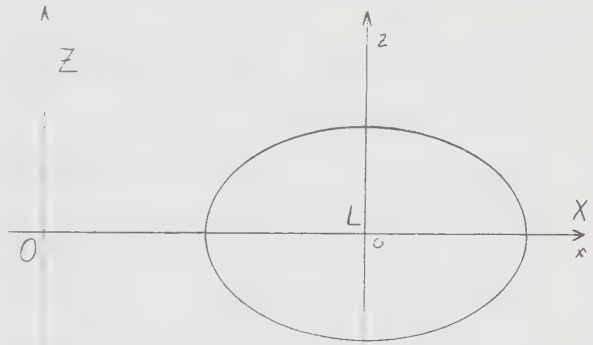
2.) ein zweidimensionales kartesisches System  $x, z$  in der Ebene  $Y = 0$  des ersten Systems, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse liegen soll, dessen  $z$ -Achse parallel zur  $Z$ -Achse verläuft und dessen

$x$ -Achse mit der  $X$ -Achse zusammenfällt.

Ein Punkt des Meridianschnitts der Ringfigur besitzt also die Koordinaten  $(x, z)$  oder  $(X, 0, Z)$ , wobei

$$Z = z; \quad X = L + x$$

gilt.



Die ersten Glieder der Entwicklung des Newtonschen Potentials dieser Ringfigur hat Garten bestimmt (Garten [1]).

Es seien  $R_1$  und  $R_2$  die Halbachsen der Ellipse und es sei

$$r = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Berücksichtigt man Glieder bis zur Größenordnung  $\frac{R^3}{L^3}$ , so erhält man nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \omega^2 (L+x) = & 4\pi \frac{x}{L} r \frac{1-r}{1+r} + \pi \frac{R_1 R_2}{L^2} \log \frac{16L}{R_1 + R_2} - \pi \frac{R_1 R_2}{L^2} \frac{5+r^2}{4} - \\ (1) \quad & - \pi \frac{x^2}{L^2} \frac{r(1-r)(6-r)}{(1+r)} + \pi \frac{R_1 R_2 x}{L^3} \frac{85+0(r)}{24} - \\ & - \pi \frac{R_1 R_2 x}{L^3} \frac{5+0(r)}{2} \log \frac{16L}{R_1 + R_2} + \pi \frac{x^3}{L^3} \frac{49+0(r)}{6} + O\left[\frac{R_0^4}{L^4}\right] \end{aligned}$$

Die Berechnungen für den Fall des kreisförmigen Meridianschnitts lassen sich unabhängig von denen durchführen, die zu dem angeführten Ergebnis im Falle des elliptischen Meridianschnitts führen, sie liefern daher eine Kontrolle. In Übereinstimmung mit (1) erhält man hier

$$\frac{1}{\pi} \omega^2(L+x) = \pi \frac{R_0^2}{L^2} \log \frac{8L}{R_0} - \pi \frac{5}{4} \frac{R_0^2}{L^2} + \pi \frac{85 R_0^2 x}{24 L^3} - \pi \frac{5 R_0^2 x}{2 L^3} \log \frac{8L}{R_0} + O\left[\frac{R_0^4}{L^4}\right]$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite (alle folgenden Glieder sind von kleinerer Größenordnung) sind konstant und sie stimmen mit der Näherung überein, die Lichtenstein für die Winkelgeschwindigkeit der ringförmigen Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft des Kreisringkörpers mit kreisförmigem Meridianschnitt findet (L. [4], S. 99). Diese Figur ist ein Rotationskörper, dessen Meridianschnitt in erster Näherung eine Ellipse darstellt, deren große Achse zur Rotationsachse hingegerichtet ist und für die gilt

$$r \approx \frac{5R_0^2}{8L^2} \log \frac{8L}{R_0}.$$

Aus (1) folgt, daß nicht jede Ringfigur mit elliptischem Meridianschnitt eine zonale Figur sein kann. Da  $\frac{R_0}{L}$  als klein vorausgesetzt werden muß, würde in (1) auf der rechten Seite der erste Summand überwiegen, wenn nicht  $|r|$  ebenfalls klein bliebe. Da nun aber  $-R_1 \leq x \leq R_1$  gilt, gäbe es dann Stellen, in denen  $\omega^2(L+x)$  negativ sein müßte, d.h. es ließe sich kein reeller Wert für die Winkelgeschwindigkeit ermitteln.

Der Meridianschnitt muß also in der Nähe des Kreises bleiben, doch kann die größere der beiden Achsen auch parallel zur Rotationsachse der Figur verlaufen.

Der erste Summand auf der rechten Seite von (1) ist auch dann sehr klein, wenn  $r$  nahe bei 1 liegt. Dies würde bedeuten, daß der Meridianschnitt eine sehr flache Ellipse wäre. Ein solcher Kreisringkörper kann jedoch keine homogene zonale Figur sein.

Aus

$$0 \leq 1 - r \leq \frac{R_0}{L}$$

folgt wegen  $R_2 \ll R_1$

$$\frac{R_0}{L} \geq 1 - r = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} > \frac{R_2}{R_1}.$$

Damit wäre aber

$$\frac{R_1 R_2}{L^2} = \frac{R_1^2}{L^2} \frac{R_2}{R_1} < \frac{R_1^2}{L^2} \frac{R_0}{L} < 4 \frac{R_0^3}{L^3},$$

d.h. die Glieder mit  $\frac{R_1 R_2}{L^2}$  wären von der Größenordnung  $\frac{R_0^3}{L^3}$ ,

während der Ausdruck  $\frac{x}{L}(1-r) \frac{1}{1+r}$  von der Ordnung  $\frac{R_0^2}{L^2}$  wäre. Das

Vorzeichen der rechten Seite von (1) würde daher im wesentlichen durch den ersten Summanden bestimmt und könnte mit  $x$  negativ werden. Dies würde bedeuten, daß keine reelle Winkelgeschwindigkeit angebbar wäre, die diesen Körper zu einer zonalen Figur machen könnte.

#### §4. Die Nachbarschaftsuntersuchung im Falle des Beispiels

Es sei  $|r| < \frac{R_0^2}{L^2}$ . Im Intervall  $\left[-\frac{R_0^2}{L^2}, \frac{R_0^2}{L^2}\right]$  bilden die betrachteten Ringkörper für hinreichend kleine Werte von  $\frac{R_0}{L}$  eine lineare Reihe von homogenen zonalen Figuren bezüglich des Parameters  $r$ . Nun kann man die Frage stellen: Gibt es innerhalb dieses Intervalls Parameterwerte, für die in der Nachbarschaft der zugehörigen Figuren homogene zonale Figuren existieren, die nicht der gegebenen linearen Reihe angehören?

Die gesuchten Nachbarschaftsfiguren sollen dieselbe Rotationsachse und dieselbe Symmetrieebene besitzen wie die gegebenen Figuren. Dann genügt es, die weiteren Untersuchungen in der Ebene eines Meridianschnittes durchzuführen.

Die Randlinie des Meridianschnittes sei mit  $\Sigma$  bezeichnet, und es soll das Koordinatensystem  $(x, z)$  zugrundegelegt werden. Die Randlinie des Meridianschnitts der Nachbarschaftsfigur soll mit  $\Sigma_1$  bezeichnet werden. Man denkt sich nun die Punkte von  $\Sigma_1$ ,  $P_1 = (x_1, z_1)$  dadurch erhalten, daß man vom Punkt  $P = (x, z) \in \Sigma$  in Richtung der Normalen  $v_P$  in diesem Punkt den Wert einer Ortsfunktion  $p\zeta$  abgetragen hat. Dabei ist  $p^2 = \left[\frac{x^2}{R_1^4} + \frac{z^2}{R_2^4}\right]^{-1}$ . Da auf  $\Sigma$  gilt:  $x = R_1 \cos\psi$ ,  $z = R_2 \sin\psi$  ( $0 \leq \psi < 2\pi$ ), erhält man für die Koordinaten des Punktes  $P_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= x + ap\zeta = x \left[ 1 + \frac{p^2}{R_1^2} \zeta \right] = R_1 \left[ 1 + \frac{p^2}{R_1^2} \zeta \right] \cos\psi \\ (1) \quad z_1 &= z + cp\zeta = z \left[ 1 + \frac{p^2}{R_2^2} \zeta \right] = R_2 \left[ 1 + \frac{p^2}{R_2^2} \zeta \right] \sin\psi \end{aligned}$$

Die Funktion  $\zeta = \zeta(\psi)$  soll dabei stetig sein und die Ableitung  $\frac{d\zeta}{d\psi}$  soll existieren und ebenfalls stetig sein. Weiterhin sollen

$|\zeta|$  und  $\left|\frac{d\zeta}{d\psi}\right|$  hinreichend klein sein:

$$(2) \quad |\zeta| \leq \epsilon ; \quad |p\zeta| \leq \Omega ; \quad \left|\frac{dp\zeta}{d\psi}\right| \leq \Omega .$$

Dann gilt für die Differenz der Newtonschen Potentiale der beiden Körper in den korrespondierenden Punkten

$$(3) \quad W_1(P_1) - W(P) = 2p\zeta \frac{\partial U}{\partial v} + 2 \int_{\Sigma} p' \zeta' \log \frac{8L}{D} ds' + \theta\{\zeta\} ,$$

wobei  $D$  den Abstand von  $P$  und  $s'$  bezeichnet,

$$(4) \quad U(x, z) = D - Ax^2 - Bz^2 \quad \left( A = \pi \frac{1-r}{2} ; B = \pi \frac{1+r}{2} \right)$$

das logarithmische Potential der mit der Dichte 1 belegten Ellipsenfläche bedeutet und  $\theta\{\zeta\}$  der Abschätzung

$$(5) \quad |\theta\{\zeta\}| \leq K\epsilon \frac{R_0}{L} \log \frac{8R_0}{L}$$

genügt (Garten [1], S. 739). Da nun

$$p \frac{\partial U}{\partial v} = -\pi R_1 R_2 (1-r) - 2\pi p^2 r \frac{1-r}{1+r} \cos^2 \psi$$

ist (Garten [1], S. 693), folgt aus (3) die Beziehung

$$(6) \quad \begin{aligned} W_1(P_1) - W(P) = & -2\pi R_1 R_2 (1-r) \zeta - 4\pi \zeta p^2 r \frac{1-r}{1+r} \cos^2 \psi + \\ & + 2 \int_{\Sigma} p' \zeta' \log \frac{8L}{D} ds' + \theta\{\zeta\} \end{aligned}$$

Die Oberflächen beider Figuren sollen Äquipotentialflächen sein, daher muß

$$(7) \quad W_1(P_1) - W(P) + \frac{1}{\kappa} \{ \Phi_1(P_1) - \Phi(P) \} = C^*$$

gelten, wenn man mit  $\Phi_1(P_1)$  und  $\Phi(P)$  die Potentiale der Zentrifugalkraft der jeweiligen Figuren in den Punkten  $P_1$  und  $P$  bezeichnet,  $C^*$  ist dabei eine kleine Konstante.

Es sei nun  $w(X)$  in dem Intervall  $[L-R_1-\Omega, L+R_1+\Omega]$  stetig differenzierbar erklärt. Bezeichnet  $\delta w$  den Ausdruck

$$(8) \quad \delta w = \frac{1}{\kappa} \{ w_1^2(L+x) - w^2(L+x) \} ,$$

so gilt, wenn noch die willkürliche Konstante in den Integralgrenzen der Ausdrücke für  $\Phi_1$  und  $\Phi$  zu  $L$  gewählt wird,

$$(9) \quad \frac{1}{\kappa} \{ \Phi_1(P_1) - \Phi(P) \} = \frac{1}{\kappa} \{ \Phi_1(L+x+ap\zeta) - \Phi(L+x) \} = \\ = \int_L^{L+x+ap\zeta} \delta w(L+x') d(L+x') + \int_{L+x}^{L+x+ap\zeta} \frac{1}{\kappa} \omega^2(L+x') (L+x') d(L+x')$$

Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man aus (7) die Beziehung

$$(10) \quad 2\pi R_1 R_2 (1-r) \zeta - 2\pi R_1 R_2 \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') \log \frac{R_1}{(1+r)D} d\psi' = -C^* + \\ + 2R_1 R_2 \log \frac{8L(1+r)}{R_1} \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') d\psi' + \int_L^{L+x+ap\zeta} \delta w(L+x') d(L+x') + \theta_1\{\zeta\}$$

Dabei sind die kleinen Glieder zu  $\theta_1\{\zeta\}$  zusammengefaßt worden.

Die lineare homogene Integralgleichung

$$(11) \quad \zeta(\psi) - \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') \log \frac{R_1}{(1+r)D} d\psi' = 0$$

hat die zu den einfachen Eigenwerten

$$(12) \quad \frac{1}{\pi(1+r)}, \frac{1}{\pi(1-r)}, \frac{2}{\pi(1+r^2)}, \frac{2}{\pi(1-r^2)}, \dots, \frac{n}{\pi(1+r^n)}, \frac{n}{\pi(1-r^n)}, \dots$$

gehörenden, gemäß

$$(13) \quad \int_0^{2\pi} v_n^2(\psi) d\psi = 1$$

normierten Eigenfunktionen

$$(14) \quad \frac{\cos \psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin \psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2\psi}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos n\psi}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\psi}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

(Garten [1], S. 697). Die homogene Integralgleichung

$$(15) \quad \zeta(\psi) - \frac{1}{\pi(1-r)} \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') \log \frac{R_1}{(1+r)D} d\psi' = 0$$

besitzt daher außer der für alle  $r$  vorliegenden trivialen Lösung

$$(16) \quad u_1(\psi) = k_1 \sin \psi \quad (k_1 = \text{const})$$

für abzählbar viele Werte  $r = r_n$  ( $n > 1$ ) genau eine weitere Lö-

sung der Form

$$(17) \quad u_2^{(n)}(\psi) = k_2^{(n)} \cos n\psi, \quad (k_2^{(n)} = \text{const})$$

wenn  $r_n$  die Gleichung

$$1 - r_n = \frac{1}{n}(1 + r_n^n)$$

erfüllt. Wegen der Beziehung

$$\sqrt{2} - 1 = r_2 < r_3 < \dots < r_n < r_{n+1} < \dots \quad (\text{Garten [1], S. 698})$$

liegen diese Werte von  $r$  außerhalb des betrachteten Intervalls

$$\left[ \frac{-R_0^2}{L^2}, \frac{R_0^2}{L^2} \right]. \text{ Dies gilt nicht für den Fall } n=1, \text{ in dem } r_1=0$$

gilt, d.h. für den Fall des kreisförmigen Meridianschnitts, in dem  $u_2^{(1)}(\psi) = k_2^{(1)} \cos \psi$  die zweite Lösung von (15) darstellt.

Aus geometrischen Gründen ist  $|r| < 1$ , daher können die Gleichungen

$$1 - r_n = \frac{1}{n}(1 - r_n^n)$$

nicht erfüllt werden, es können also keine Lösungen von (15)

auftreten, die die Form  $u_1^{(n)}(\psi) = k_1^{(n)} \sin n\psi$  haben.

Es braucht demnach nur die Kernzerspaltung

$$(18) \quad N(\psi, \psi') = \log \frac{R_1}{(1+r)D} \begin{cases} -(1-r)\sin\psi\sin\psi' & (r \neq 0) \\ -(1-r)\sin\psi\sin\psi' - \cos\psi\cos\psi' & (r=0) \end{cases}$$

durchgeführt zu werden. Die homogene Integralgleichung

$$(19) \quad \pi(1-r)\zeta(\psi) - \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') N(\psi, \psi') d\psi' = 0$$

besitzt dann keine Lösung mehr.

Es soll nun zunächst der Fall  $r \neq 0$  betrachtet werden. Wegen der Kernzerspaltung (18) müßte auf der rechten Seite von (10) noch ein Term

$$(20) \quad - 2R_1 R_2 \int_0^{2\pi} (1-r)\sin\psi\sin\psi' \zeta(\psi') d\psi' = w \sin \psi$$

mit einer als kleinen Parameter aufzufassenden Konstanten  $w$

auftreten. Da die Lösung (16) der homogenen Integralgleichung (15) aber der Verschiebung der Figur in Richtung der Rotationsachse entspricht und diese sowie die Symmetrieebene erhalten bleiben soll, kann man

$$(21) \quad w = 0$$

setzen. Der Ausdruck  $\delta w$  sei durch

$$(22) \quad \delta w = 2\pi\lambda \frac{R_2}{L} \sum_1^N k \gamma_k \frac{x^{k-1}}{R_1^{k-1}}$$

gegeben, wobei

$$(23) \quad \sum_1^N k |\gamma_k| < 1$$

gelten und  $\lambda$  ein kleiner Parameter sein soll. Hieraus folgt mit (10)

$$(24) \quad \begin{aligned} \zeta(\psi) - \frac{1}{\pi(1-r)} \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') N(\psi, \psi') d\psi' &= \frac{-C^*}{2\pi R_1 R_2 (1-r)} + \\ &+ \frac{1}{\pi(1-r)} \log \frac{8L(1+r)}{R_1} \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') d\psi' + \frac{\lambda}{1-r} \sum_0^N \beta_k \cos k\psi + \theta_2\{\zeta\} \end{aligned}$$

Dabei sind in  $\theta_2\{\zeta\}$  alle Glieder zusammengefaßt worden, die klein von mindestens zweiter Ordnung sind, und wegen (23) gilt

$$(25) \quad \sum_1^N \gamma_k \cos k\psi = \sum_0^N \beta_k \cos k\psi \quad \text{mit} \quad \sum_0^N |\beta_k| < 1.$$

Da hier nur die erste Näherung  $\zeta_1(\psi)$  bestimmt werden soll, genügt es, die Gleichung

$$(26) \quad \begin{aligned} \zeta_1(\psi) - \frac{1}{\pi(1-r)} \int_0^{2\pi} \zeta_1(\psi') \left\{ \log \frac{R_1}{(1+r)D} - (1-r) \sin\psi \sin\psi' \right\} d\psi' &= \\ &= \frac{-C^*}{2\pi R_1 R_2 (1-r)} + \frac{1}{\pi(1-r)} \log \frac{8L(1+r)}{R_1} \int_0^{2\pi} \zeta_1(\psi') d\psi' + \frac{\lambda}{1-r} \sum_0^N \beta_k \cos k\psi \end{aligned}$$

zu betrachten.

Setzt man nun  $\zeta_1(\psi)$  als ein trigonometrisches Polynom vom Grad N an, so liefert der Ansatz

$$\zeta_1(\psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^N \{a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi\}$$

nach Koeffizientenvergleich

$$a_0 = \frac{-C^* + \lambda \beta_0 2\pi R_1 R_2}{\pi R_1 R_2 \left\{ 1 - r - 2 \log \frac{8L(1+r)}{R_1} \right\}}$$

$$a_m = \frac{\lambda m \beta_m}{m-1-mr-r^m} \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$$b_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N) .$$

Da in (22) über die Koeffizienten  $\gamma_k$  im Rahmen von (23) frei verfügt werden kann, sind die Konstanten  $\beta_n$  - und damit auch die Konstanten  $a_n$  - frei wählbare kleine Parameter. In der ersten Näherung gibt es also beliebig viele Nachbarschaftsfiguren, selbst im regulären Fall  $r \neq 0$ , in dem die homogene Gleichung nur die triviale Lösung  $u_1$  besitzt.

Im Falle des kreisförmigen Meridianschnitts ( $r=0$ ;  $R_1 = R_2 = R$ ) lautet die Gleichung für die erste Näherung

$$\begin{aligned} \zeta_1(\psi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta_1(\psi') \left\{ \log \frac{R_1}{(1+r)L} - (1-r) \sin \psi \sin \psi' - \cos \psi \cos \psi' \right\} d\psi' \\ &= \frac{-C^*}{2\pi R^2} + \frac{1}{\pi} \log \frac{8L}{R} \int_0^{2\pi} \zeta_1(\psi') d\psi' + \lambda \sum_0^N \beta_k \cos k\psi + \omega \cos \psi . \end{aligned}$$

Der Ansatz für  $\zeta_1$  als trigonometrisches Polynom liefert

$$a_0 = \frac{-C^* + \lambda \beta_0 2\pi R^2}{\pi R^2 \left\{ 1 - 2 \log \frac{8L}{R} \right\}} \quad ; \quad a_1 = \lambda \beta_1 + \omega \quad ;$$

$$a_m = \frac{\lambda m \beta_m}{m-1} \quad (m = 2, 3, \dots, N) ; \quad b_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

In diesem Fall ist allerdings nach vollständiger Lösung noch zu untersuchen, ob die Verzweigungsgleichung

$$\tilde{w} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\psi') \cos \psi' d\psi'$$

erfüllt werden kann. Hier erkennt man deutlich, daß  $\tilde{w}$  nicht mehr die Sonderrolle wie im klassischen Fall zukommt, da neben dem kleinen Parameter  $\lambda$ , der Auskunft über den maximalen Wert des Betrags der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten gibt, außer  $\tilde{w}$  noch die  $N+1$  Parameter  $\beta_k$  auftreten, über die unter Berücksichtigung von (23) frei verfügt werden kann.

#### §4. Einige Hilfssätze

Gegeben sei eine zonale Figur T mit dem Rand S. Der Wert der Dichte f soll sich in T+S nur an einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen sprungweise ändern, im übrigen soll f stetig sein und in jedem Stetigkeitsbereich stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen. Die Gesamtheit der Sprungflächen der Dichte sei mit  $\Sigma$  bezeichnet, der Wert des Sprungs mit  $[f]$ . Die z-Achse sei die Rotationsachse der Figur, die Ebene  $z=0$  sei eine Symmetrieebene. R bezeichne den Abstand von der z-Achse und  $\varphi$  den Azimutwinkel. Mit  $\kappa\psi$  soll der Wert der Schwerkraft bezeichnet sein. Da eine zonale Figur vorliegt, herrscht Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse: T, S und  $\Sigma$  sind rotationssymmetrisch. Die Funktionen f und  $\psi$  sind als rotationssymmetrische Ortsfunktionen von  $\varphi$  unabhängig:

$$f(R, z, \varphi) = f(R, z) \quad ; \quad \psi(R, z, \varphi) = \psi(R, z) .$$

Bei der Untersuchung der Frage, ob es in der Nachbarschaft von T+S zonale Figuren mit nichtkonstanter Dichtebelegung gibt, übernimmt die folgende homogene Integralgleichung die Rolle der Gleichung (19) des ersten Paragraphen (vgl. L [2], S.114)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \psi(t)\zeta(t) + \int_S f(s') \left\{ \frac{1}{D(t, s')} - \frac{1}{D(0, s')} \right\} \zeta(s') ds' - \\ & - \int_{\Sigma} [f(\sigma')] \left\{ \frac{1}{D(t, \sigma')} - \frac{1}{D(0, \sigma')} \right\} \zeta(\sigma') d\sigma' - \\ & - \int_T \frac{\partial f(t')}{\partial \nu_{t'}} \left\{ \frac{1}{D(t, t')} - \frac{1}{D(0, t')} \right\} \zeta(t') dt' = 0 \end{aligned}$$

Mit  $D(t, t')$  soll dabei der Abstand der Punkte t und t' bezeichnet werden,  $D(0, t')$  bezeichnet also den Abstand des Punktes t'

vom Ursprung. Die Ortsfunktion  $\zeta$  ist hier nicht nur, wie im Falle konstanter Dichte, auf  $S$  sondern in  $T+S$  zu bestimmen.

Hilfssatz 1: Die Lösungen der Integralgleichung (1) sind entweder von der Form  $F(R,z)$  oder sie treten paarweise auf und lassen sich in der Form  $F_1(R,z)\cos k\varphi$ ,  $F_1(R,z)\sin k\varphi$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) schreiben.

Die Beweisidee Lichtensteins für den Fall homogener Gleichgewichtsfiguren (L. [2], S. 52) läßt sich auf unseren Fall übertragen. Bezeichnet  $t$  (bzw.  $s, \sigma$ ) einen Punkt mit den Koordinaten  $(R, z, \varphi)$ , so soll  $t_\gamma$  (bzw.  $s_\gamma, \sigma_\gamma$ ) den Punkt mit den Koordinaten  $(R, z, \varphi + \gamma)$  bezeichnen. Fast unmittelbar sehen wir, daß mit  $u(t)$  auch  $u(t_\gamma)$ , und zwar für jedes  $\gamma$ , eine Lösung von (1) ist.

Hieraus folgt insbesondere, daß auch die partielle Ableitung von  $u$  nach  $\varphi$  eine Lösung von (1) ist, falls sie nicht identisch verschwindet. Gilt  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} \equiv 0$ , so ist  $u$  eine Lösung vom Typ  $F(R, z)$ . Da auch die höheren partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $\varphi$ , sofern sie nicht identisch verschwinden, mit  $u$  Lösungen von (1) sind, (1) aber nur endlich viele linear unabhängige Lösungen besitzt, muß  $u$  eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllen, deren sämtliche Lösungen die Periode  $2\pi$  besitzen. Aus der Gestalt der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung folgt die Aussage des Hilfssatzes.

Es soll noch eine weitere Eigenschaft der Lösungen von (1) erwähnt werden: Die Lösungen von (1) können so gewählt werden, daß

(2)  $u(R, z, \varphi) = u(R, -z, \varphi)$  oder  $u(R, z, \varphi) = -u(R, -z, \varphi)$  gilt (Lichtenstein [6], S. 534-535).

Die Gleichung (1) läßt sich mit den Abkürzungen

$$L(t, t') = \begin{cases} -\frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial f(t')}{\partial v_{t'}} \left\{ \frac{1}{D(t, t')} - \frac{1}{D(0, t')} \right\} & t' \in T - \Sigma \\ \frac{f(s')}{\psi(t)} \left\{ \frac{1}{D(t, s')} - \frac{1}{D(0, s')} \right\} & t' = s' \in S \\ -\frac{[f(\sigma')]}{\psi(t)} \left\{ \frac{1}{D(t, \sigma')} - \frac{1}{D(0, \sigma')} \right\} & t' = \sigma' \in \Sigma \end{cases}$$

$$Dt' = \begin{cases} dt' & \text{in } T - \Sigma \\ ds' & \text{auf } S \\ d\sigma' & \text{auf } \Sigma \end{cases}$$

als

$$(1') \quad \zeta(t') + \int L(t, t') \zeta(t') Dt' = 0$$

schreiben. Die zugehörige adjungierte Gleichung

$$(3) \quad W(t') + \int L(t, t') W(t) Dt = 0$$

enthält die Funktion W. Diese steht als Zusammenfassung für

$$W(t') = \begin{cases} w(t') & t' \in T - \Sigma \\ w_s(s') & t' = s' \in S \\ w_\sigma(\sigma') & t' = \sigma' \in \Sigma \end{cases}$$

Dabei erfüllen die Funktionen  $w, w_s, w_\sigma$  die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} w(t') - \int_{T-\Sigma} \frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial f(t')}{\partial v_{t'}} \left\{ \frac{1}{D(t, t')} - \frac{1}{D(0, t')} \right\} w(t) dt - \\ - \int_S \frac{1}{\psi(s)} \frac{\partial f(t')}{\partial v_{t'}} \left\{ \frac{1}{D(s, t')} - \frac{1}{D(0, t')} \right\} w_s(s) ds - \\ - \int_\Sigma \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{\partial f(t')}{\partial v_{t'}} \left\{ \frac{1}{D(\sigma, t')} - \frac{1}{D(0, t')} \right\} w_\sigma(\sigma) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_s(s') + \int_{T-\Sigma} \frac{f(s')}{\psi(t)} \left\{ \frac{1}{D(t, s')} - \frac{1}{D(0, s')} \right\} w(t) dt + \\ (4) \quad + \int_S \frac{f(s')}{\psi(s)} \left\{ \frac{1}{D(s, s')} - \frac{1}{D(0, s')} \right\} w_s(s) ds + \\ + \int_\Sigma \frac{f(s')}{\psi(\sigma)} \left\{ \frac{1}{D(\sigma, s')} - \frac{1}{D(0, s')} \right\} w_\sigma(\sigma) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

$$w_\sigma(\sigma') - \int_{T-\Sigma} \frac{[f(\sigma')]}{\psi(t)} \dots w(t) dt - \dots - \int_\Sigma \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\sigma)} \dots w_\sigma(\sigma) d\sigma = 0$$

simultan (vgl. Lichtenstein [2], S. 119; [8], S. 221-222).

Hilfssatz 2: Ist  $\zeta$  eine Lösung von (1), die die Gestalt

$F_1(R, z) \cos \varphi$  oder  $F_1(R, z) \sin \varphi$  besitzt oder für die  $\zeta(R, z, \varphi) = -\zeta(R, -z, \varphi)$  gilt, so wird (3) durch  $W(t')$  mit

$$w(t') = - \frac{\partial f(t')}{\partial v_{t'}} \psi(t') \zeta(t')$$

$$(5) \quad w_s(s') = f(s') \psi(s') \zeta(s')$$

$$w_{\sigma}(\tau') = - [f(\tau')] \psi(\tau') \zeta(\tau')$$

erfüllt.

Den Beweis erhält man durch Einsetzen und Berücksichtigen der Symmetrieeigenschaften.

Die triviale Lösung von (1)  $u_1 = \text{const.} c$  ist eine der Funktionen, für die  $u_1(R, z, \varphi) = -u_1(R, -z, \varphi)$  gilt. Liegt keine andere Lösung von (1) vor, handelt es sich also um den regulären Fall, so erhält man die Lösung der adjungierten Gleichung durch (5).

Die Gleichung (1) habe die orthonormierten Lösungen  $U_1, \dots, U_m$ , die adjungierte Gleichung (3) entsprechend  $W_1, \dots, W_m$ . Dann besitzt die Integralgleichung

$$\zeta(t) + \int M(t, t') \zeta(t') Dt' = 0$$

mit dem Kern

$$(6) \quad M(t, t') = L(t, t') - \sum_1^m W_i(t) U_i(t')$$

keine Lösung mehr. Die zu (1) gehörende inhomogene Gleichung

$$\zeta(t) + \int L(t, t') \zeta(t') Dt' = F(t)$$

läßt sich mit (6) in der Form

$$(7) \quad \zeta(t) + \int M(t, t') \zeta(t') Dt' = - \sum_1^m W_i(t) \int U_i(t') \zeta(t') Dt' + F(t)$$

schreiben. Zur Untersuchung der Nachbarschaftsfrage führt man wie im homogenen Fall zunächst unbestimmte Parameter  $r_i$  gemäß

$$(8) \quad r_i = -\int U_i(t') \zeta(t') Dt'$$

ein und beweist die Existenz einer Lösung von

$$(9) \quad \zeta(t) + \int M(t, t') \zeta(t') Dt' = \sum_1^m r_i W_i(t) + F(t)$$

für hinreichend kleine Werte von  $r_i$  und der sonstigen Parameter. Eine Lösung von (9) ist nur dann eine Lösung von (7), wenn sich die Verzweigungsgleichungen (8) erfüllen lassen.

Hier interessieren nur solche Lösungen  $\zeta$ , die rotationssymmetrisch zur z-Achse und symmetrisch zur Ebene  $z=0$  sind. Für die Lösungen von (1), die die im Hilfssatz 2 angegebene Form haben, sind die Gleichungen (8) trivial, d.h. mit  $r_i=0$ , erfüllt.

Die Verzweigungsgleichungen können also nur dann eine Rolle spielen, wenn es Lösungen von (1) gibt, die von der Gestalt  $F(R, z)$  sind und für die  $F(R, z) = F(R, -z)$  gilt.

Um zu zeigen, daß in diesem Fall auch die zugehörigen Lösungen der adjungierten Gleichung (3) rotationssymmetrisch und spiegelsymmetrisch sind, zeigen wir den

Hilfssatz 3: Die Lösungen der adjungierten Gleichung (3) haben

die Gestalt  $W(t') = W_0(R', z')$  oder sie treten

paarweise auf und lassen sich in der Form

$W_1(R', z') \cos kp'$ ,  $W_1(R', z') \sin kp'$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) schreiben.

Die Lösungen können so gewählt werden, daß

$W_i(R', z') = W_i(R', -z')$  oder  $W_i(R', z') = -W_i(R', -z')$

gilt ( $i = 0, 1$ ).

Der Beweis des ersten Teils der Aussage verläuft analog zum Beweis des Hilfssatzes 1.

Wenn  $t'$  den Punkt  $(R', z', \varphi)$  bezeichnet, soll  $t'^{-}$  für  $(R', -z, \varphi)$  stehen. Wie man leicht sieht, ist mit  $W(t')$  stets auch  $W(t'^{-})$  eine Lösung von (3) und damit auch  $W(t') - W(t'^{-})$  und

$W(t') + W(t'^-)$ , womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 4: Die Anzahl der Lösungen von (3), die von  $\varphi$  unabhängig und zur Ebene  $z=0$  symmetrisch sind, ist gleich der Anzahl solcher Lösungen von (1).

Mit Hilfssatz 2 läßt sich leicht ein indirekter Beweis führen, wenn man die Symmetrieeigenschaften des Kernes beachtet.

Bisher wurde die Gleichung (1') mit dem Kern  $L(t, t')$  betrachtet, es wurden Aussagen über die Gestalt ihrer Lösungen und über die Lösungen der adjungierten Gleichung (3) gemacht. Im nächsten Paragraphen benötigen wir eine Aussage über die Gestalt der Lösung einer inhomogenen Integralgleichung, die hier formuliert werden soll.

Hilfssatz 5: Ist  $G$  eine in  $T+S$  definierte, zur Ebene  $z=0$  symmetrische und bezüglich der  $z$ -Achse rotationssymmetrische Funktion, so ist die Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$(10) \quad \zeta(t) + \int M(t, t') \zeta(t') Dt' = G(t)$$

symmetrisch zur Ebene  $z=0$  und rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse.

Der Beweis ist analog zu den Betrachtungen im Falle einer homogenen zonalen Figur zu führen (vgl. §1.).

Besitzt die homogene Integralgleichung (1) nur solche Lösungen, die bezüglich der Ebene  $z=0$  antisymmetrisch sind oder die Gestalt  $F(R, z) \cos k\varphi$  oder  $F(R, z) \sin k\varphi$  haben, so ist eine Lösung  $\zeta$  von (10) wegen der eben gezeigten Symmetrieeigenschaften und wegen (6) zugleich eine Lösung von

$$(11) \quad \zeta(t) + \int L(t, t') \zeta(t') Dt' = G(t).$$

Umgekehrt ist jede zu  $z=0$  symmetrische, zur  $z$ -Achse rotationssymmetrische Lösung von (11) auch eine Lösung von (10).

§5. Nichthomogene zonale Figuren in der Nachbarschaft einer  
gegebenen nichthomogenen zonalen Figur

Satz: Gegeben sei eine nichthomogene zonale Figur  $T$  mit dem Rand  $S$ ,  $T$  sei homöomorphes Bild einer Kugel,  $S$  besitze eine stetige Außennormale, deren Richtungscosinus stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die einer Hölderbedingung genügen. Die  $z$ -Achse sei die Rotationsachse, die Ebene  $z=0$  eine Symmetrieebene der Figur. Die Dichteverteilung sei durch eine bezüglich der  $z$ -Achse rotationssymmetrische, zur Ebene  $z=0$  symmetrische positive Funktion  $f$  gegeben. Längs der positiven  $z$ -Achse nehme  $f$  mit wachsendem  $z$  nicht zu. Die Punktmengen  $\{t; t \in T+S, f(t) \geq f'\}$  sollen für alle Werte der Konstanten  $f'$ , die kleiner sind als der maximale Wert der Dichte, homöomorphe Bilder der Kugel sein. Außer auf einer endlichen Anzahl geschlossener Sprungflächen, deren Gesamtheit mit  $\Sigma$  bezeichnet sei, sei  $f$  stetig und besitze in jedem Stetigkeitsgebiet stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer Hölderbedingung genügen. Die Niveauflächen des Gesamtpotentials  $U$  sollen ineinandergeschachtelt sein und sich auf den Ursprung zusammenziehen. Die Niveaufläche, die die positive  $x$ -Achse in  $x=p$  schneidet, sei mit  $S_p$  bezeichnet, die Oberfläche sei  $S=S_L$ . Die Orthogonaltrajektorien der Niveauflächen sollen stetige, gleichmäßig beschränkte Krümmung besitzen. Die Richtungscosinus der in jedem Punkt von  $T+S$  außerhalb des Ursprungs vorhandenen Außennormale  $\vec{v}=(a,b,c)$  der zugehörigen Niveau-

fläche sollen außerhalb des Ursprungs stetig sein und stückweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die sich bei 0 wie  $r^{-1}$  verhalten ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ). Außer im Ursprung soll in T+S stets  $\frac{\partial U}{\partial v} < 0$  gelten; die Schwerkraft soll nur in 0 verschwinden, ihr Betrag soll sich bei 0 wie  $r$  verhalten. Die Verteilung der Winkelgeschwindigkeit sei durch die Funktion  $w$  ( $w \neq \text{const}$ ) gegeben,  $w$  soll im Intervall  $[0, R_M]$  stetige Ableitungen jeder Ordnung besitzen.

Zu jeder in  $[0, R_M]$  stetigen Funktion  $\lambda$ , die Ableitungen jeder Ordnung besitzt, jeder in T+S stückweise hölderstetigen Funktion  $\chi$ , die auf jeder Äquipotentialfläche  $S_\rho$  einen konstanten Wert annimmt und dieselbe Monotonieeigenschaft wie  $f$  besitzt und jeder stetig differenzierbaren Funktion  $k(\rho)$  mit  $k(L) \neq 0$  gibt es genau eine nichthomogene zonale Figur  $T_1 + S_1$ , deren Winkelgeschwindigkeitsverteilung durch die Funktion  $w_1$  mit  $w_1^2(R) - w^2(R) = \lambda(R)$

gegeben ist, deren Dichteverteilung durch die Funktion  $f_1$  gemäß  $f_1(t_1) = f(t) + \gamma \chi(t)$  mit einer positiven Konstanten  $\gamma$  gegeben ist und deren Gesamtpotential  $U_1$  auf den Äquipotentialflächen  $S_{\rho_1}$  den Wert  $U(S_\rho) + \gamma \{U_\Delta(0) + h\rho^2 k(\rho)\}$  besitzt,

f a l l s

$\text{Max}\left\{ |h|, \gamma, |\lambda|, \left| \frac{d\lambda}{dR} \right| \right\} = \Omega_1$  hinreichend klein ist, die homogene Gleichung des Problems nur solche Lösungen besitzt, die die Gestalt  $F(R, z) \cos k\varphi$  oder  $F(R, z) \sin k\varphi$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) haben oder für die  $\zeta(R, z, \varphi) = -\zeta(R, -z, \varphi)$  gilt und die umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte  $t \in T+S$  und  $t_1 \in T_1 + S_1$  und damit der Äquipotentialflächen  $S_\rho$  und  $S_{\rho_1}$  durch eine in T+S rotations- und spiegelsymmetrische Funktion  $\zeta$  geliefert wird, die beschränkte partielle

Ableitungen erster Ordnung besitzt und die Bedingungen

$$(1) \quad |\zeta| < \delta_0 ; \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| < \delta_0 ; \quad \zeta(0) = 0$$

mit hinreichend kleinem  $\delta_0$  ( $>0$ ) erfüllt.

Dabei ist  $\kappa_{\Delta} U(0) = U_1(0) - U(0)$ . Der Beweis dieses Satzes kann in enger Anlehnung an die entsprechende Untersuchung Lichtensteins (L. [6]) für den Fall nichthomogener Gleichgewichtsfiguren geführt werden. Man betrachtet die Differenz der Potentiale  $U_1$  und  $U$  zweier benachbarter nichthomogener zonaler Figuren  $T_1+S_1$  und  $T+S$  mit derselben Rotationsachse und der Symmetrieebene  $z=0$ , wobei eine eindeutige Zuordnung der Punkte  $t_1=(x_1, y_1, z_1)$  und  $t=(x, y, z)$  der entsprechenden Äquipotentialflächen  $S_{\rho 1}$  und  $S_{\rho}$  durch eine Funktion  $\zeta$  mit den Eigenschaften (1) durch

$$(2) \quad x_1 = x + a\zeta(t) ; \quad y_1 = y + b\zeta(t) ; \quad z_1 = z + c\zeta(t)$$

vermittelt wird, wobei  $\vec{v}=(a, b, c)$  die Außennormale von  $S_{\rho}$  im Punkte  $t$  ist. Diese Funktion  $\zeta$  muß der Gleichung

$$(3) \quad \zeta(t) + \int L(t, t') \zeta(t') Dt' = \frac{1}{\mu(t)} \left[ h\rho^2 k(\rho) + \Pi(\lambda, \zeta) - \right. \\ \left. - \nu \int_{T_1} x(t') \left\{ \frac{1}{D(t_1, t'_1)} - \frac{1}{D(0, t'_1)} \right\} dt'_1 - \frac{1}{\kappa} \int_0^R \lambda(R') R' dR' \right]$$

mit den Abkürzungen  $L(t, t'), Dt'$  aus dem vorigen Paragraphen genügen. In  $\Pi(\lambda, \zeta)$  sind die Größen zusammengefaßt, die klein sind von mindestens zweiter Ordnung.

Es sind nur solche Lösungen von (3) zu bestimmen, die rotationssymmetrisch zur  $z$ -Achse und symmetrisch zur Ebene  $z=0$  sind. Für jede Funktion  $\zeta$ , die diese Symmetrieeigenschaften besitzt, besitzt auch die rechte Seite von (3) diese Eigenschaften. Wegen der Bemerkung vom Ende des vorigen Paragraphen genügt es

daher, die Gleichung

$$(4) \quad \zeta(t) + \int M(t, t') \zeta(t') Dt' = \frac{1}{\psi(t)} \left[ h_0^2 k(0) + \Pi\{\lambda, \zeta\} - \right. \\ \left. - \gamma \int_{T_1} x(t') \left\{ \frac{1}{D(t_1, t_1')} - \frac{1}{D(0, t_1')} \right\} dt_1' - \frac{1}{\kappa} \int_0^{R(t)} \lambda(R') R' dR' \right]$$

zu betrachten.

Mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximation läßt sich zeigen, daß (4) genau eine Lösung  $\zeta$  mit den verlangten Eigenschaften besitzt, falls  $\alpha_1$  und  $\delta_0$  hinreichend klein gewählt werden.

Hierzu ist anzumerken, daß man - wie im Falle der homogenen zonalen Figuren - die Näherungen mit einer Funktion  $\zeta_1$  beginnt, die die verlangten Eigenschaften besitzt und dann nachweist, daß sich diese Eigenschaften bei jedem Iterationsschritt von  $\zeta_i$  auf  $\zeta_{i+1}$  übertragen. Hierzu benötigt man insbesondere den Hilfssatz 5 des vorigen Paragraphen. Die Anwendbarkeit und die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximation läßt sich bei den vorausgesetzten Eigenschaften von  $\omega$  und  $\lambda$  ohne große Mühe analog zu Lichtensteins Betrachtungen nachweisen.

Damit ist die Existenz und die eindeutige Bestimmtheit einer Funktion  $\zeta$  gegeben, die die verlangten Symmetrieeigenschaften besitzt und eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte  $t_1$  und  $t$  zweier Figuren  $T_1 + S_1$  und  $T + S$  liefert.

Die Figur  $T_1 + S_1$  ist rotationssymmetrisch zur z-Achse und spiegelsymmetrisch zur Ebene  $z=0$ . Die Äquipotentialflächen sind Flächen gleicher Dichte und ziehen sich auf den Ursprung zusammen. Auch sie besitzen die genannten Symmetrieeigenschaften. Die Dichte  $f_1$  nimmt längs der positiven z-Achse mit wachsendem  $z$  nicht zu, entsprechendes gilt, wenn man längs einer Orthogo-

naltrajektorie vom Ursprung zur Oberfläche  $S_1$  fortschreitet. In  $T_1 + S_1$  gilt  $f_1(t_1) > 0$ . Es soll nun nachgewiesen werden, daß der Druck  $p_1$  in  $T_1$  stets positiv ist. In der Ausgangsfigur T+S kann die Orthogonaltrajektorie zur Schar der Niveaulächen des Potentials  $U$ , die mit der positiven x-Achse zusammenfällt:

$0 \leq x \leq L$  ;  $y=z=0$  , umkehrbar eindeutig und stetig differenzierbar auf jede andere Orthogonaltrajektorie abgebildet werden. Wir ordnen jedem Punkt der Bild-Trajektorie den Wert der Bogenlänge längs dieser Trajektorie, gemessen vom Ursprung, zu. Zu jeder Bild-Trajektorie gibt es eine umkehrbar eindeutige, stetig differenzierbare Funktion  $B$ , die das Intervall  $[0, L]$  auf das Intervall  $[0, B(L)]$  abbildet, wobei  $B(L)$  die Bogenlänge der Bild-Trajektorie bezeichnet:

$$B: \rho \in [0, L] \rightarrow B(\rho) \in [0, B(L)]$$

Auf  $[0, L]$  ist die Funktion  $U(\rho)$  streng monoton fallend. Auf  $[0, B(L)]$  ist eine streng monoton fallende Funktion  $U^*$  durch  $U^*(B[\rho]) = U(\rho)$  gegeben. Für  $\frac{dB}{d\rho}$  erhalten wir

$$\frac{dB}{d\rho} = \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{B(\rho+\Delta\rho) - B(\rho)}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{U(\rho+\Delta\rho) - U(\rho)}{\Delta\rho} \cdot \frac{B(\rho+\Delta\rho) - B(\rho)}{U^*(B[\rho+\Delta\rho]) - U^*(B[\rho])}$$

$$\text{also } \frac{dB}{d\rho} = \frac{dU}{d\rho} \cdot \frac{1}{\frac{dU^*}{dB}} \quad \text{und damit} \quad \frac{d\rho}{dB} = \frac{dU^*}{dB} \cdot \frac{1}{\frac{dU}{d\rho}} .$$

Nun ist  $\left. \frac{dU^*}{dB} \right|_{B(\rho)}$  gleich der Normalableitung von  $U$  im Schnittpunkt der betrachteten Trajektorie mit der Niveauläche  $S_0$  des Potentials

$$\frac{dU^*}{dB} = \left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_{\text{Traj}} \quad \text{und damit} \quad \left. \frac{d\rho}{dv} \right|_{\text{Traj}} = \frac{\left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_{\text{Traj}}}{\left. \frac{\partial U}{\partial v} \right|_{x\text{-Achse}}} .$$

In der Umgebung  $\mathcal{V}_\delta(0)$  des Ursprungs ( $\delta > 0$ ) verhält sich  $v$  und damit  $\frac{\partial U}{\partial v}$  wie  $r$ , d.h. es gilt dort

$0 < c_1 r \leq - \frac{\partial U}{\partial v} \leq c_2 r$  mit Konstanten  $0 < c_1 < c_2$ . Dort gilt also

$$\frac{c_1}{c_2} \leq \frac{d\sigma}{dv} \leq \frac{c_2}{c_1}$$

In  $T+S-\mathcal{V}_\delta(0)$  gilt  $0 < a_1 \leq - \frac{\partial U}{\partial v} \leq a_2$  mit Konstanten  $0 < a_1 < a_2$  und somit

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{d\gamma}{dv} \leq \frac{a_2}{a_1}.$$

Wir betrachten nun  $\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1}$ , das ist der Wert der Ableitung von  $U_1$  in der Richtung der Außennormale  $v$  der Niveauläche von  $U$ , die durch den Urbildpunkt  $t$  von  $t_1$  verläuft, im Punkt  $t_1$ . Es gilt

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1} = \frac{\partial}{\partial v} \{U_1(t_1) - U(t)\} + \frac{\partial U}{\partial v} t = \kappa n \frac{d}{dv} \{o^2 k(\rho)\} + \kappa \psi(t)$$

und daher

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1} \leq \kappa \psi(t) + \kappa |h| \{2\sigma |k(\rho)| + \rho^2 |k'(\rho)|\} A,$$

wenn  $A = \max\{\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{c_1}\}$  gesetzt wird. Man gilt in  $\mathcal{V}_\delta(0)$

$\beta_1 r < \rho < \beta_2 r$  mit Konstanten  $0 < r_1 < r_2$  und deshalb ist dort

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1} \leq -c_1 r + \kappa |h| \left\{ 2 \max_{[0, L]} |k| + \beta_2 r \max_{[0, L]} |k'| \right\} A \beta_2 r,$$

während für  $t \in T+S-\mathcal{V}_\delta(0)$

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1} \leq \kappa \max_{T+S-\mathcal{V}_\delta(0)} \psi + \kappa |h| \left\{ 2L \max_{[0, L]} |k| + L^2 \max_{[0, L]} |k'| \right\} A$$

gilt. Wegen dieser beiden Ungleichungen ist für hinreichend

kleine Werte von  $|h|$  in jedem Punkt  $t_1 \in T_1+S_1$  außerhalb des

Ursprungs  $\left. \frac{\partial U_1}{\partial v} \right|_{t_1} < 0$ . Hieraus folgt, daß in  $T_1+S_1-\{0\}$

$\frac{\partial U_1}{\partial v} \neq 0$  ist.

Da in der Symmetrieebene  $z=0$  der Figuren die Normalenrichtungen von  $v$  und  $v_1$  übereinstimmen, gilt dort und damit (aus Ste-

tigkeitsgründen) in  $T_1+S_1-\{0\}$ :  $\frac{\partial U_1}{\partial v_1} < 0$ .

Da zwischen Druck und Gesamtpotential der Zusammenhang  $dp = fdU$  besteht, gilt in  $T_1+S_1-\{0\}$

$$\frac{\partial p_1}{\partial v_1} < 0 \quad ; \quad \psi_1 \neq 0.$$

Da der Außendruck den Wert Null haben soll, gilt für den Druck  $p_1$  in  $T_1$  stets  $p_1 > 0$ .

In Verbindung mit den übrigen nachgewiesenen Eigenschaften ist dies eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer zonalen Figur (Vgl. Lichtenstein [2], S. 6).

Damit ist sichergestellt, daß  $T_1+S_1$  eine nichthomogene zonale Figur in der Nachbarschaft von  $T+S$  ist.

Bezüglich des Begriffs der linearen Reihe überträgt sich alles, was hierzu im Falle konstanter Dichte gesagt wurde. Während zum

Existenzbeweis nur die Größen  $\text{Max}_{[C, R_{\infty}]} |\lambda|$  und  $\text{Max}_{[C, R_{\infty}]} \left| \frac{d\lambda}{dR} \right|$  benötigt

werden, spielt bei der Anzahl der Nachbarschaftsfiguren, wenn wir einmal von dem möglichen Auftreten von Verzweigungsgleichungen absehen, wegen der eindeutigen Bestimmtheit von  $\zeta$  die

Anzahl der Funktionen  $w_1$ , für die  $\text{Max}_{[C, R_{\infty}]} |\lambda|$  und  $\text{Max}_{[C, R_{\infty}]} \left| \frac{d\lambda}{dR} \right|$  kleiner als  $\Omega_1$  sind, die maßgebliche Rolle.

Mit den Symmetrieüberlegungen des Paragraphen 4 ist es gelungen, auch für einen Teil der singulären Fälle den Existenzbeweis für zonale Nachbarschaftsfiguren zu führen. Dieser Beweis behält seine Gültigkeit für den Fall konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , d.h. für den Fall, daß man sich auf rotationssymmetrische nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen solchen Figur beschränkt. Diese Erwei-

terung des Beweises von Lichtenstein wird dadurch möglich, daß die Verzweigungsgleichungen in diesen Fällen trivial erfüllt sind und daß somit auf der rechten Seite der inhomogenen Gleichung (4) des Problems keine Beiträge von den Eigenfunktionen der homogenen Gleichung zu (3) auftreten, über deren Verhalten in der Umgebung des Ursprungs zunächst keine Aussage bekannt ist, während für den Gang des Beweises wesentlich ist, daß die bei den Iterationen auftretenden Faktoren von  $\frac{1}{\psi(t)}$  auf der rechten Seite der aus (4) entstehenden Gleichungen sich dort wie  $r^2$  verhalten.

Zusammenstellung benutzter Bezeichnungen  
=====

R Abstand von der Rotationsachse

$\varphi$  Azimutwinkel

$\omega$  Betrag der Winkelgeschwindigkeit

T zonale Figur

S Oberfläche von T

$\Sigma$  Gesamtheit der Sprungflächen der Dichte

t Punkt in T

s Punkt auf S

$\sigma$  Punkt auf  $\Sigma$

f Dichte

$[f(\sigma)]$  Wert des Sprunges der Dichte im Punkt  $\sigma$

$\vec{\nu}$  Außennormale

a, b, c Richtungscosinus der Normalen

$\kappa$  Gravitationskonstante

$\kappa\psi$  Wert der Schwerkraft

$D(t, t')$  Abstand der Punkte t und t'

$V(t)$  Newtonsches Potential des Körpers T im Aufpunkt t

$\Phi(R)$  Potential der Zentrifugalkraft in einem Punkt mit dem  
Abstand R von der Rotationsachse

Literaturverzeichnis

APPEL, P.:

- [1] Traité de Mécanique Rationnelle. Tome III, Paris 1928.
- [2] Traité de Mécanique Rationnelle. Tome IV, Paris 1921.

DIVE, P.:

- [1] Rotations internes des astres fluides. Paris 1930.

GARTEN, V.:

- [1] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörpern. Math.Z. 35, 684-745 (1932).

HÖLDER, E.:

- [1] Über einige Integralgleichungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Anwendung auf Stabilitätsbetrachtungen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 78, 55-72 (1926).

JARDETZKY, W.:

- [1] Recherches mathématiques sur l'évolution de la Terre. R. Serb. Acad. Belgrade, Spec. Ed. 107 (1935)
- [2] Theories of Figures of Celestial Bodies. New York 1958.

LICHTENSTEIN, L.:

- [1] Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten. Math. Z. 39, 639-647 (1935).
- [2] Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Leipzig 1933.
- [3] Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen. Berlin 1931.
- [4] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung: Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Math.Z. 13, 82-118 (1922).
- [5] Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Math.Z. 7, 126-231 (1920).

- [6] Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung. Math.Z. 36, 481-562 (1933).
- [7] Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. 1918, 1120-1135.
- [8] Bemerkungen über belastete Integralgleichungen. Studia Math. 3, 212-225 (1931).
- [9] Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken. Acta Math. 36, 345-368 (1913).

MISES, R.v.-FRIEDRICHS, K.O.:

- [1] Fluid Dynamics. Heidelberg 1971.

SCHMIDT, E.:

- [1] Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. 65, 370-399 (1908).

WAVRE, R.:

- [1] Figures planétaires et Géodesie. Paris 1932.

## Lebenslauf

Am 9. Juli 1940 wurde ich, Helmut Kahleis, als Sohn des Arztes Dr. med. Helmut Kahleis und seiner Ehefrau Dr. med Anna, geb. Schiele in Aussig geboren.

Nach Besuch der Volksschulen in Königsau, Alsfeld und Gießen trat ich Ostern 1951 in die Liebigschule in Gießen ein, die ich bis zur Reifeprüfung 1960 besuchte.

Im SS 1960 begann ich in Frankfurt das Studium der Mathematik und Physik. vom WS 1960/61 bis zum SS 1962 studierte ich in Gießen, im WS 1962/63 in Innsbruck und vom SS 1963 an wieder in Gießen, wo ich bis zum SS 1965 immatrikuliert war.

Die Diplomvorprüfung in Mathematik bestand ich im Mai 1962, die Vorprüfung in Philosophie, Pädagogik und Politik im Mai 1965 und die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien im Februar 1967.

Seit dem Januar 1969 war ich am Mathematischen Institut als Verwalter einer Assistentenstelle angestellt.

Außer Herrn Professor Dr. K. Maruhn waren meine akademischen Lehrer vor allem die Herren Professoren:

Behrens, Berz, Blumenberg, Boerner, Eder, Endl, Franz, Gaier, Gröbner, Huckemann, Kockel, Pickert, Scharmann und Simon.







